UNIVERSAL LIBRARY

LEÇONS D'ANALYSE VECTORIELLE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Introduction au Calcul tensoriel et au Calcul différentiel absolu. Avec une préface de M. J. Hadamard, Membre de l'Institut. 1 vol. Paris, Blanchard, 1922.

Mécanique analytique et Théorie des Quanta. 1 vol. Paris, Blanchard, 1926.

Sur une équation aux dérivées fonctionnelles partielles et sur une généralisation du théorème de Jacobi. (Thèse.) 1 vol. Paris, Blanchard, 1926.

Considérations sur la Relativité et sur les Théories physiques. 1 brochure. Lausanne, Rouge, 1929.

Quelques aspects de la Mécanique ondulatoire et de la Théorie des Quanta. 1 brochure. Lausanne, Rouge, 1929.

La structure des nouvelles théories physiques. 1 vol. de la Nouvelle collection scientifique, dirigée par M. E. Borel, Membre de l'Institut. Paris, Alcan, (sous presse).

COURS DE L'ÉCOLE D'INGÉNIEURS DE LAUSANNE

LEÇONS D'ANALYSE VECTORIELLE

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES COURBES ET DES SURFACES
THÉORIE MATHÉMATIQUE DES CHAMPS

PAR

GUSTAVE JUVET

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
PROFESSEUR A L'ÉCOLE D'INGÉNIEURS DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

LAUSANNE
LIBRAIRIE F. ROUGE & Cie, S. A.
RUE HALDIMAND

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

1933

PRÉFACE

Les traités de calcul vectoriel en langue française ne manquent pas ; ils sont presque tous excellents dans les chapitres où ils traitent de l'algèbre vectorielle et de la théorie des courbes et des surfaces ; quelques-uns d'entre eux exposent la théorie des champs d'une manière parfaite, mais très difficile pour des débutants ; d'autres introduisent les opérateurs différentiels par des considérations physiques fort suggestives, mais qui peuvent en masquer la généralité et qui rompent l'unité d'un exposé théorique ; enfin, les derniers définissent les dits opérateurs au moyen de coordonnées et démontrent ensuite que cette définition est indépendante du choix des axes ; cette méthode indirecte n'est pas conforme à l'esprit du calcul vectoriel.

Ce qui distingue notre exposé, en ce qui concerne l'analyse vectorielle, c'est qu'il est élémentaire, qu'il reste purement mathématique, c'est-à-dire qu'il ne se fonde sur aucune propriété physique des champs, (sauf dans les définitions du début où il est bon de faire appel à l'intuition), et qu'il est, grâce à une définition peu connue des opérateurs différentiels, parfaitement conforme à la doctrine-même de ceux qui ont fondé le calcul vectoriel, algorithme direct destiné à faire une étude intrinsèque de certains êtres géométriques. Cette définition a été donnée pour la première fois, nous semble-t-il, par M. von Ignatowsky, dans sa *Vektoranalysis* (Teubner, éd.).

Les matières de ce petit livre forment le programme de la première partie d'un cours que je professe à l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne. Il s'adresse à des étudiants qui ont déjà une connaissance précise du calcul différentiel et du calcul intégral, c'est pourquoi quelques-unes de mes démonstrations se fondent sur le jeu des infiniment petits, auquel le lecteur peut donner toute la précision qu'il désire lorsque le

raisonnement un peu rapide ne l'aura pas satisfait. D'autre part, je n'ai pas fait des hypothèses générales pour l'étude des courbes, des surfaces et des champs ; au contraire, en supposant la continuité, la dérivabilité et l'analyticité, ainsi que l'existence de certaines limites, j'ai restreint, semble-t-il, le domaine des applications. Mais ces restrictions ne sont pas gênantes ; on le verra bien dans le volume qui suivra et qui exposera la seconde partie de mon cours traitant des applications de l'analyse vectorielle à la physique et des problèmes aux limites que ces applications posent au mathématicien. La seconde partie, plus volumineuse que cette première, permettra au lecteur de voir le sens physique des opérateurs vectoriels. Si l'on peut prétendre que, du point de vue de la pédagogie, il doit y avoir quelque avantage à montrer des applications physiques immédiatement après les définitions et les théorèmes, il y en a un bien plus grand, du même point de vue, et aussi et surtout de celui de la logique, à exposer la doctrine vectorielle d'une seule venue comme un chapitre de la mathématique pure, et à en faire ensuite des applications cohérentes à telle ou telle partie de la physique. D'ailleurs, les exercices placés à la fin des chapitres aideront à comprendre plus clairement encore la portée de leur texte.

Il m'est agréable d'exprimer ici ma reconnaissance à M. J. Landry, Directeur de l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne, à l'initiative de qui ce cours d'analyse vectorielle est dû ; il a voulu, connaissant les profits qu'un ingénieur peut tirer d'une connaissance précise de l'analyse vectorielle, que ceux qui sortent de l'Ecole qu'il dirige avec tant de distinction, puissent tirer parti de la puissance d'un si bel instrument ; je voudrais que mes lecteurs eussent autant de plaisir à lire ce cours que j'en ai à le professer.

Deux amis, MM. M. Gex et G. de Rham, m'ont aidé à faire les figures de ce livre et à en corriger les épreuves ; je les remercie cordialement de leur aimable collaboration.

La librairie Rouge S. A. n'a pas craint, en ces temps de crise, de prendre ce livre dans son fonds ; elle en a particulièrement soigné la présentation ; que son Conseil d'administration en soit vivement remercié, et tout particulièrement M. P. Feissly, l'un des directeurs de cette maison.

Lausanne, novembre 1932.

G. Juvet.

CHAPITRE PREMIER

Algèbre vectorielle.

Définitions.

1. Considérons dans l'espace euclidien deux points auxquels nous assignons un ordre : le premier A, le second B. Ils déterminent, sur la droite indéfinie d qui les contient, une portion de celle-ci, laquelle aura une origine A et une extrémité B. Une telle figure se nomme un *vecteur*.

Deux points A et B déterminent donc un vecteur, lorsqu'il est bien entendu que l'on a spécifié l'ordre dans lequel on les considère. A s'appelle l'*origine* et B l'*extrémité* du vecteur.

Ce même vecteur peut être caractérisé autrement encore :

par son *origine* A ;

par son *support* d, ou ce qui revient au même, quand l'origine est donnée, par sa *direction*, celle de d ;

par son *sens*, celui de la *demi-droite* portée par d qui va de A vers B ;

par sa *longueur*, on dit aussi son *intensité* ou sa *valeur absolue*, qui est simplement le nombre mesurant la portion de droite AB, lorsqu'on a fait choix d'une unité de longueur.

Il est parfois commode, dans le cours d'un problème, de considérer le support comme orienté ; sur la droite d, on choisit un sens positif, dès lors, le vecteur déterminé par A et B est caractérisé par son origine A, son support d et sa *mesure* qui est un nombre relatif représentant à la fois le sens et la longueur ; le calcul des vecteurs sur un même axe se confond avec le calcul des *segments* sur cet axe.

Un vecteur dont l'origine et l'extrémité coïncident est un *vecteur nul* ; son support est indéterminé. Un vecteur dont la valeur absolue est égale à 1, s'appelle un *vecteur unité*.

2. On pourrait sans plus représenter un vecteur par la notation AB, mais, en géométrie analytique, cette expression est en général la longueur du vecteur qui va de A vers B. Nous choisirons la notation, utilisée dans de nombreux livres français :

$$\overrightarrow{AB}.$$

Il est utile souvent de représenter un vecteur par une lettre, mais il faut la distinguer typographiquement de celles qui représentent des nombres. Certains auteurs utilisent des lettres grasses, (ou des lettres gothiques, les lettres italiques étant réservées aux nombres), nous écrirons plutôt

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \ldots,\ \vec{u},\ \vec{v},\ \ldots$$

et nous représenterons la longueur du vecteur qui est un nombre par la lettre qui représente le vecteur, mais en supprimant la flèche. Parfois aussi, nous représenterons cette longueur comme on représente la valeur absolue en algèbre ; ainsi

$$|\vec{a}| = a,$$

et comme en géométrie

$$|\overrightarrow{AB}| = AB.$$

S'il est utile d'orienter le support du vecteur, la lettre a pourra représenter la mesure algébrique du vecteur $\vec{a}$ sur l'axe qui le porte, et dans ce cas, on aura

$$|\vec{a}| = |a|,\ |\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}|.$$

3. Les vecteurs sont considérés comme des grandeurs, mais un nombre ne suffit pas à les caractériser. Les *grandeurs vectorielles*, comme la vitesse d'un point, son accélération, les forces agissant sur un système, un corps solide, par exemple, s'opposent aux *grandeurs scalaires*, qu'un nombre suffit à caractériser, comme la fortune d'un particulier, la température en un point d'un corps, la densité, etc.

Dans les calculs où elles entrent, ces deux sortes de grandeurs se distingueront par les notations que nous avons indiquées ; elles obéissent à des règles que la suite de ces leçons nous fera connaître.

4. Suivant la nature des questions dont traitent la mécanique ou la physique, il arrive qu'une grandeur vectorielle est définie sans qu'il soit nécessaire d'en préciser l'origine ; la direction, le sens et la longueur suffisent à la caractériser. Ainsi deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$, d'origines A et A' quelconques, de supports parallèles, de même sens et de même longueur, et qu'on appelle *vecteurs équipollents*, représenteraient la même grandeur. On dit, dans ce cas, que ladite grandeur est représentée par un

vecteur libre. Pour les vecteurs libres, l'équipollence joue le rôle de l'égalité, on écrira

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Ainsi, comme on l'apprend en mécanique, le moment d'un couple est un vecteur libre ; en effet, le moment d'un couple est le même en tous les points de l'espace.

Si la grandeur vectorielle, au contraire, a une origine parfaitement fixée, — la vitesse d'un point matériel, la force agissant sur une molécule d'un fluide par exemple, — le vecteur qui la représente est dit un *vecteur lié.* Deux vecteurs liés sont égaux s'ils ont la même origine et la même extrémité ; l'équipollence n'est plus l'égalité.

Il y a un cas intermédiaire, celui où la grandeur vectorielle sans avoir une origine précisée a un support bien défini ; le vecteur qui la représente peut glisser sur le support, en conservant son sens et sa longueur, bien entendu ; c'est ce qu'on constate pour les forces agissant sur un solide, on peut les déplacer, sans altérer leur effet, le long de leur ligne d'action ; on a affaire alors à des *vecteurs glissants.* L'égalité de deux vecteurs glissants ne peut avoir lieu qu'entre vecteurs sur un même support ; elle exprime l'égalité des segments sur ce support orienté.

A moins de mention expresse, il ne sera question dans ce qui suivra que de *vecteurs libres.*

Addition et soustraction des vecteurs.

5. On va définir des opérations qui ont des propriétés analogues aux propriétés de l'addition et de la soustraction des nombres relatifs. On les appellera *addition géométrique* et *soustraction géométrique*, ou simplement *addition* et *soustraction* des vecteurs.

Additionner deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$, en faire la *somme*, c'est trouver un certain vecteur $\vec{v}$ dont l'origine O est quelconque ; on porte à partir de O le vecteur $\vec{a}$, à l'extrémité duquel on place l'origine du vecteur $\vec{b}$, c'est l'extrémité de $\vec{b}$ qui est alors l'extrémité de $\vec{v}$.

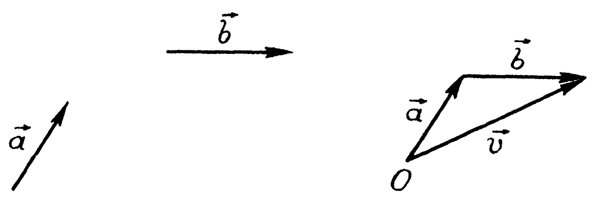


Fig 1.

Il est bien évident que si l'on avait porté à partir de O, $\vec{b}$ d'abord puis $\vec{a}$ ensuite, on eût obtenu le même vecteur $\vec{v}$.

On écrit

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$$

et l'on a

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

L'addition de deux vecteurs est *commutative*.

On voit aussi que la somme de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est la diagonale du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ramenés à avoir la même origine.

Etant donné trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, on appelle somme de ces trois vecteurs, un vecteur $\vec{u}$ obtenu en ajoutant à $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$, le vecteur $\vec{c}$:

$$\vec{u} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

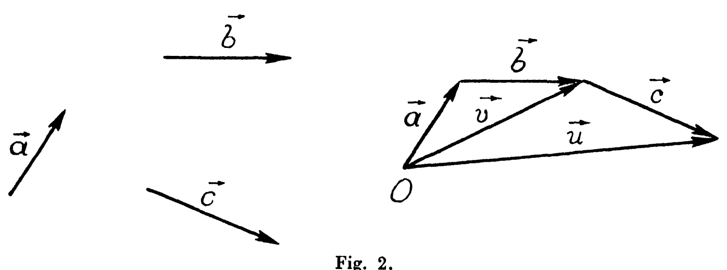


Fig. 2.

mais il est visible que

$$\vec{u} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) ;$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

L'addition de trois vecteurs est *associative*. Dès lors on peut écrire sans ambiguïté :

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

et l'on peut passer à un nombre quelconque de vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{l}$; leur somme

$$\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots + \vec{l}$$

est parfaitement définie de proche en proche, l'ordre des termes n'intervient pas dans le résultat final, non plus que les additions partielles qu'on pourrait avoir effectuées.

On voit qu'on peut dire que l'origine de la somme de ces vecteurs est l'origine d'un *contour polygonal* obtenu en portant bout à bout les vecteurs donnés dans un ordre quelconque, l'origine de chacun d'eux se confondant avec l'extrémité du précédent ; l'extrémité du vecteur somme est l'extrémité du contour polygonal, c'est donc l'extrémité du dernier vecteur. On dit aussi que la somme $\vec{w}$ est la ***résultante*** du contour polygonal formé avec $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{l}$.

Si la somme de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est un vecteur nul, on dit que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont *opposés* et l'on écrit

$$\vec{b} = -\vec{a}.$$

Les caractéristiques de deux vecteurs opposés sont les mêmes, sauf leurs sens.

6. Reprenons la figure 1 ; on y a

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b};$$

$\vec{v}$ et $\vec{a}$ étant donnés, le vecteur $\vec{b}$ s'appelle la différence de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$, ou mieux, c'est le vecteur obtenu en soustrayant de $\vec{v}$ le vecteur $\vec{a}$; on écrit

$$\vec{b} = \vec{v} - \vec{a}.$$

L'on voit aisément que $\vec{b}$ s'obtient aussi en ajoutant à $\vec{v}$ le vecteur opposé à $\vec{a}$, d'où

$$\vec{b} = \vec{v} + (-\vec{a}).$$

La soustraction se ramène à l'addition comme en algèbre, et les règles ordinaires de l'algèbre relatives à l'addition ou à la soustraction s'étendent sans difficultés au calcul vectoriel.

Multiplication d'un vecteur par un nombre.

7. Il est tout naturel d'écrire

$$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a},$$

ce qui est d'ailleurs parfaitement conforme aux conventions du calcul des segments sur un axe.

D'une façon générale le p-uple d'un vecteur $\vec{a}$, qu'on écrira $p\vec{a}$, s'obtient en ajoutant $\vec{a}$, $(p - 1)$ fois à lui-même.

La moitié de $\vec{a}$ qu'on écrira $\frac{\vec{a}}{2}$ ou $\frac{1}{2}\vec{a}$ se définit bien aisément aussi par la règle

$$2\left(\frac{\vec{a}}{2}\right) = \vec{a}.$$

On définit sans difficulté le vecteur $\frac{p}{q}\vec{a}$.

Il n'y aura qu'à faire intervenir la continuité pour définir le vecteur $\lambda\vec{a}$, lorsque λ est un nombre irrationnel.

On sait donc, et cela on l'a appris par la théorie des segments sur un axe et par la notion de *coupure*, assigner un sens précis au symbole $s\vec{a}$, $\vec{a}$ étant un vecteur quelconque et s un nombre réel quelconque [1].

On a les règles

$$s\vec{a} + t\vec{a} = (s+t)\vec{a}$$
$$s\vec{a} + s\vec{b} = s(\vec{a} + \vec{b})$$
$$s(t\vec{a}) = st\vec{a}.$$

Si $s\vec{a}$ est un vecteur nul, on en déduit que $s = 0$ ou que $\vec{a}$ est un vecteur nul.

Multiplicité linéaire vectorielle.

8. Les vecteurs de l'espace forment un ensemble d'objets dont on a défini l'addition et la multiplication par un nombre. Ces deux opérations ne font pas sortir de l'ensemble, c'est-à-dire que la somme de deux objets de l'ensemble est un objet de l'ensemble, et le produit d'un objet de l'ensemble par un nombre est un objet de l'ensemble.

D'une manière générale, si $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{l}$ sont des vecteurs donnés, l'expression

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \ldots + \lambda\vec{l},$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant des nombres, représente un vecteur. On dit, pour exprimer ce fait, que les vecteurs de l'espace forment une multiplicité linéaire.

Les vecteurs qu'on peut tracer dans un plan forment aussi une multiplicité linéaire. On va voir ce qui la distingue de la précédente.

9. On dit que n vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{l}$ sont *linéairement indépendants* s'il est impossible de trouver n nombres α, β, ..., λ non tous nuls tels que la combinaison

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \ldots + \lambda\vec{l}$$

[1] On écrira parfois aussi $\vec{a}s$ pour $s\vec{a}$.

représente un vecteur nul, c'est-à-dire tels que l'on ait

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \ldots + \lambda\vec{l} = 0.$$

Deux vecteurs dont les supports sont parallèles ne sont pas linéairement indépendants, car l'un d'eux $\vec{b}$ est égal à l'autre $\vec{a}$ multiplié par un nombre s et l'on a

$$\vec{b} - s\vec{a} = 0.$$

Il a été possible de trouver deux nombres 1, $-s$, qui ne sont pas nuls tous les deux de façon à avoir une combinaison linéaire des deux vecteurs qui se réduise à zéro, on dit que les deux vecteurs sont linéairement dépendants.

Dans un plan, trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont toujours linéairement dépendants. Comme on peut supposer, d'après ce qui précède, que les supports de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas parallèles, on peut trouver deux

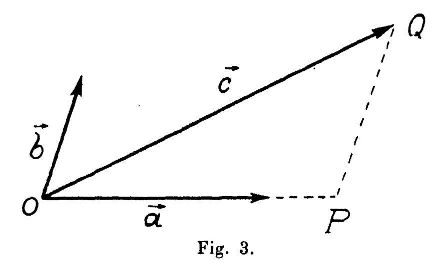


Fig. 3.

vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{PQ}$ respectivement parallèles à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$ tels que

$$\vec{c} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}.$$

Mais $\overrightarrow{OP} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{PQ} = \beta\vec{b}$, α et β étant des nombres faciles à déterminer, dès lors

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - 1\vec{c} = 0.$$

On a démontré la proposition suivante : *Tout vecteur $\vec{c}$ d'un plan peut s'exprimer linéairement en fonction de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de ce plan à condition que les supports de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne soient pas parallèles.*

On verrait de même que quatre vecteurs de l'espace ne sont jamais linéairement indépendants et que tout vecteur $\vec{a}$ de l'espace peut donc s'exprimer par une combinaison linéaire de trois vecteurs non parallèles à un même plan, c'est-à-dire qui formeraient un véritable trièdre si on leur donnait la même origine.

Donc, dans le cas du plan, tout vecteur $\vec{v}$ peut s'écrire :

$$\vec{v} = \xi_1 \vec{a_1} + \xi_2 \vec{a_2}$$

$\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$ n'étant pas parallèles, et, dans le cas de l'espace, tout vecteur $\vec{v}$ est de la forme :

$$\vec{v} = \xi_1 \vec{a_1} + \xi_2 \vec{a_2} + \xi_3 \vec{a_3}.$$

Si l'on donne aux ξ toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, les formules précédentes représentent respectivement tous les vecteurs libres du plan et tous les vecteurs libres de l'espace ; ils s'expriment au moyen de *deux* ou de *trois vecteurs de base*, les $\vec{a_i}$, et cela univoquement.

On dit alors que les vecteurs du plan forment une *multiplicité linéaire à deux dimensions*, ceux de l'espace, une multiplicité linéaire à *trois dimensions*.

10. L'algèbre vectorielle linéaire peut se fonder sur une *axiomatique* ; elle traite d'un ensemble d'objets à l'intérieur duquel on a défini l'addition ; cette opération satisfait aux axiomes de l'addition ordinaire, et l'on a défini la multiplication par un nombre, en satisfaisant encore à des axiomes faciles à dégager des indications du § 7. On complète ces axiomes en ajoutant le suivant : l'ensemble des vecteurs qu'on aura à considérer forme une multiplicité linéaire à n dimensions. Si $n = 2$, notre ensemble est isomorphe à l'ensemble des vecteurs du plan ; si $n = 3$, il est isomorphe à l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Géométrie affine.

11. Si l'on se donne arbitrairement deux vecteurs de base $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$, ou, pour ne pas compliquer l'écriture, $\vec{a}$ et $\vec{b}$, il est possible de traiter tous les problèmes de la géométrie affine du plan, et si l'on se donne trois vecteurs de base $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, on pourra traiter tous les problèmes de la géométrie affine de l'espace. Rappelons que la géométrie affine étudie les propriétés des figures qui sont invariantes lorsqu'on transforme lesdites figures de façon qu'à tout point correspond un point, à toute droite, une droite, à tout plan, un plan, et que la droite de l'infini, ou le plan de l'infini, reste invariable.

Le *rapport de division* d'un segment AB est une notion de la géométrie affine. Donnons-nous A et B au moyen de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ issus d'un point fixe O :

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB} ;$$

le point C qui divise AB dans le rapport

$$\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

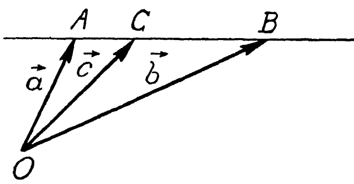


Fig. 4.

est défini par le vecteur

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a} + \lambda \vec{b}}{1 + \lambda}.$$

En effet,

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC};$$
$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB},$$
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

donc

$$\overrightarrow{CB} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{1 + \lambda},$$

et par suite

$$\vec{c} = \vec{a} + \lambda \frac{\vec{b} - \vec{a}}{1 + \lambda} = \frac{\vec{a} + \lambda \vec{b}}{1 + \lambda}.$$

12. Résolvons quelques problèmes. I. Trouver l'équation d'une droite passant par un point A et parallèle à une direction donnée.

On aura, d'une façon générale, l'équation vectorielle d'un lieu, lorsque, s'étant donné un point fixe O, on aura exprimé le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ qui va de O au *point courant* P qui décrit le lieu, et cela, au moyen des données qui définissent le lieu et de paramètres variables.

Si l'on se donne la direction de la droite cherchée par celle du support d'un vecteur $\vec{b}$, et si l'on pose $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, on aura

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP},$$

mais

$\overrightarrow{AP} = s\vec{b}$ (s étant un nombre compris entre $-\infty$ et $+\infty$);

dès lors :

$$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$$

est l'équation cherchée, s y est un paramètre variable.

II. L'équation de la droite qui passe par deux points A et B donnés par les vecteurs

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

s'écrit évidemment :

$$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a})$$

ou encore

$$\vec{r} = (1 - s)\,\vec{a} + s\,\vec{b}.$$

On tire de là :

$$(1 - s)\,\vec{a} + s\,\vec{b} - 1\,\vec{r} = 0.$$

Les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{r}$ ont même origine et sont coplanaires : il n'est pas étonnant qu'il y ait une relation linéaire entre eux ; ce qu'il faut remarquer, c'est que la somme des trois coefficients $1 - s$, s, -1 dans cette relation est égale à zéro. La réciproque est évidente, dès lors :

Si trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ont même origine, la condition nécessaire et suffisante pour que leurs extrémités soient en ligne droite est qu'il y ait entre eux une relation

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$$

avec

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

III. Montrons que les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point. On se donnera le triangle OAB par les deux vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Equation de la médiane issue de O : $\vec{r} = s\,\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ (s, variable)

Equation de la médiane issue de A : $\vec{r} = \vec{a} + t\left(\dfrac{\vec{b}}{2} - \vec{a}\right)$ (t, variable).

Le point G d'intersection de ces deux médianes est défini par l'une et l'autre des deux équations précédentes pour un choix particulier convenable de s et de t ; on doit avoir :

$$\frac{s}{2}\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} - \left[(1 - t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b}\right] = 0,$$

comme $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas parallèles, ils sont linéairement indépendants et, par suite, la relation précédente n'est possible que si les coefficients de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont nuls à la fois :

$$\frac{s}{2} - 1 + t = 0,$$

$$\frac{s}{2} - \frac{t}{2} = 0 ;$$

d'où
$$s = t = \frac{2}{3},$$
et
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}).$$

On aurait trouvé, à cause de la symétrie, que le point G' d'intersection de la médiane issue de O avec la médiane issue de B est tel que
$$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) :$$
$G = G'$, et la proposition est démontrée.

13. Dans l'espace, il ne se présente pas de difficultés nouvelles.

IV. Trouver l'équation d'un plan passant par un point A et parallèle à deux droites. On se donne $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, et les deux droites par les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$; dès lors
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP},$$
mais
$$\overrightarrow{AP} = s\vec{b} + t\vec{c},$$
et par suite
$$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad (s,\ t,\ \text{variables})$$
est l'équation cherchée.

V. Trouver l'équation d'un plan passant par trois points A, B, C ; on se donne
$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c};$$
$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + s(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}),$$
$$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a});$$
d'où
$$(1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} - 1\vec{r} = 0.$$

Entre quatre vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ de même origine et dont les extrémités sont coplanaires, il existe une relation de la forme
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = 0$$
avec
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

La réciproque est évidente et l'on peut formuler une proposition analogue à celle du § 12.

Il est inutile d'en dire davantage, le lecteur trouvera plus loin des problèmes qui lui permettront de comprendre, mieux que ne le feraient de longues explications, le jeu des équations vectorielles en géométrie affine.

Produit scalaire de deux vecteurs.

14. Dans les considérations de la géométrie affine, les longueurs des vecteurs n'interviennent pas. La notion de produit scalaire, qui les fait entrer en jeu, est une notion de la *géométrie métrique*.

Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$; on appelle *produit scalaire* de $\vec{a}$ par $\vec{b}$ et l'on représente par la notation

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{ou} \quad \vec{a}\vec{b} \quad \text{ou encore} \quad (\vec{a}\,\vec{b}),$$

le nombre p égal au produit des longueurs de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$ par le cosinus de l'angle θ (défini à un multiple de 2π près) que forme la demi-droite dont le sens est celui de $\vec{a}$ avec la demi-droite dont le sens est celui de $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta.$$

C'est donc le produit de la longueur de $\vec{a}$ par la mesure de la projection de $\vec{b}$ sur l'axe orienté dans le sens de $\vec{a}$.

On voit immédiatement par là que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

la multiplication scalaire est une opération commutative.

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, ou bien $\vec{a}$ est nul, ou bien $\vec{b}$ est nul, ou bien $\vec{a}$ *est perpendiculaire à* $\vec{b}$; la condition de perpendicularité de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ s'écrira donc :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

La multiplication scalaire est *distributive par rapport à l'addition*, ce qui s'exprime par l'égalité :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

La démonstration de ce fait est aisée, si l'on se rappelle que la projection d'un contour polygonal sur un axe est égale à la somme algébrique des projections de ses composantes. Sur l'axe orienté comme $\vec{a}$, c'est-à-dire sur un axe parallèle à $\vec{a}$ et dont le sens positif est celui de $\vec{a}$, on a

$$\text{proj. de } (\vec{b} + \vec{c}) = \text{proj. de } \vec{b} + \text{proj. de } \vec{c};$$

en multipliant les deux membres de cette égalité par a, on démontre la proposition énoncée. Il est clair qu'on peut la généraliser pour une somme d'un nombre quelconque de termes, et pour deux facteurs qui sont chacun des sommes, le produit se fait selon les règles du produit des polynômes.

Relations entre la géométrie analytique et le calcul vectoriel.

15. On peut très facilement donner une forme vectorielle aux méthodes de la géométrie analytique et, par suite, obtenir une interprétation cartésienne des formules du calcul vectoriel.

Soit un trièdre trirectangle $Oxyz$, que nous supposerons orienté de

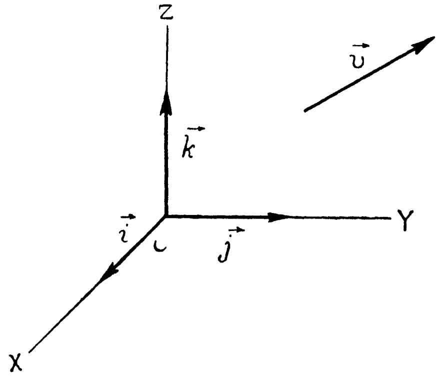


Fig. 5.

façon que pour un observateur placé sur le plan xOy, le long de Oz, et regardant dans la direction Ox, l'axe Oy soit à sa gauche.

Un tel trièdre est dit direct, son orientation est bien définie par la donnée de ses trois arêtes dans un ordre fixé ; il en est de même pour tout trièdre non-dégénéré. Sur chacun de ces axes, à partir de O, portons un vecteur de longueur unité ; ces trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ formeront des vecteurs de base au moyen desquels on repérera tel vecteur de l'espace que l'on voudra :

$$\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},$$

X, Y, Z en seront les *composantes* ; ce sont des nombres relatifs égaux aux mesures des projections de $\vec{v}$ sur les trois axes.

Un point P est repéré par le moyen du vecteur

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

x, y, z étant les *coordonnées cartésiennes de* P.

Le produit scalaire de 2 vecteurs

$$\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v}' = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}$$

s'obtient par la règle du produit de deux polynômes qui procède de la distributivité, et par la règle suivante

$$\alpha\vec{a} \cdot \beta\vec{b} = \alpha\beta\vec{a} \cdot \vec{b}$$

qui résulte de la définition même du produit scalaire. Il faudra connaître donc les produits des vecteurs de base les uns par les autres, or :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0.$$

Dès lors :

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = XX' + YY' + ZZ'.$$

Si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont deux vecteurs unités, X, Y, Z et X', Y', Z' sont leurs *cosinus directeurs* (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $\vec{v} \cdot \vec{v}' = \cos\theta$, θ étant l'angle des deux demi-droites $\vec{v}$ et $\vec{v}'$:

$$\cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

16. Montrons l'usage du produit scalaire. Soit à démontrer que les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point. On se donnera encore le triangle par les sommets O, A, B :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{b},$$

la hauteur issue de O est perpendiculaire à $\vec{b} - \vec{a}$, le vecteur $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ joignant O au point courant sur cette ligne satisfait donc à l'équation

$$\vec{r} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0\,;$$

la hauteur issue de A, a pour équation

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0\,;$$

et celle qui part de B :

$$(\vec{r} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0.$$

Ces trois équations ont une solution $\vec{r}$ commune, car, en soustrayant les deux dernières membre à membre, on trouve la première. Il y a donc un point commun aux trois hauteurs.

L'équation vectorielle du cercle de rayon d centré au point A, $(\overrightarrow{OA} = \vec{a})$ est

$$(\vec{r} - \vec{a})^2 = d^2,$$

on l'emploie comme l'équation cartésienne, mais les calculs sont plus rapides. (Voir les exercices à la fin du chapitre.)

Produit vectoriel.

17. Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre ; on sort de l'ensemble des vecteurs au moyen de cette opération intéressant deux objets de l'ensemble. Nous allons définir une autre opération qui n'est malheureusement ni commutative, ni associative, mais qui est *distributive* par rapport à l'addition et qui, au moyen de deux vecteurs, permet d'en construire un troisième. Si l'on remarque que pour le calculateur, ou mieux pour l'algébriste, c'est la distributivité qui est la propriété fondamentale de la multiplication, on sera fondé à appeler encore *multiplication* l'opération dont on vient de parler. Pour la distinguer de l'autre, elle est dite *vectorielle* et le résultat est le *produit vectoriel.*

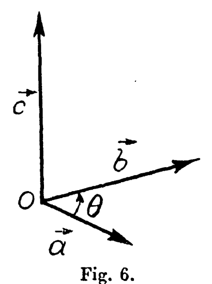


Fig. 6.

On appelle *produit vectoriel* du vecteur $\vec{a}$ (multiplicateur) et du vecteur $\vec{b}$ (multiplicande) et l'on représente par [1]

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

qui se lit $\vec{a}$ *cross* $\vec{b}$, un troisième vecteur $\vec{c}$ qui se construit comme suit.

[1] On emploie dans d'autres ouvrages les notations $[\vec{a}\,\vec{b}]$ ou $\vec{a} \wedge \vec{b}$, nous nous en tenons à la notation de Gibbs.

A partir d'un point O on mène $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et l'on considère l'angle inférieur (ou au plus égal) à 180° que forment ces deux vecteurs. Si l'on balaie cet angle en allant de $\vec{a}$ vers $\vec{b}$, on tournera autour d'un observateur placé le long de la perpendiculaire au plan $O\vec{a}$, $O\vec{b}$, issue de O, dans le sens positif ou dans le sens négatif suivant la façon dont l'observateur est placé le long de cette perpendiculaire. Il aura l'orientation de $\vec{c}$, c'est-à-dire que $\vec{c}$ le traversera des pieds à la tête, si le balayage se fait pour lui dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens de sa droite vers sa gauche. On peut dire aussi que l'orientation du trièdre $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, est directe (comme celle du trièdre trirectangle $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$). La direction et le sens de $\vec{c}$ sont fixés ; sa longueur aura pour mesure le nombre qui mesure l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$,

$$|\vec{c}| = |ab \sin \theta|.$$

En échangeant $\vec{a}$ avec $\vec{b}$, on change l'orientation du trièdre ; pour la conserver il faut retourner $\vec{c}$, donc

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Le produit vectoriel n'est pas commutatif. Le produit $\vec{a} \times \vec{b}$ est nul si $\vec{a} = 0$, ou si $\vec{b} = 0$ *ou si les supports de* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont parallèles* ; la condition de parallélisme de deux vecteurs s'écrira

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0.$$

On a

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0.$$

18. *Il est distributif par rapport à l'addition*, c'est-à-dire :

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

La démonstration de cette règle se fonde sur le lemme suivant :

Le produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ ne change pas si dans la figure O, $\vec{a}$, $\vec{b}$ l'on remplace l'un des facteurs, $\vec{b}$, par exemple, par un vecteur qui a le même sens et la même longueur que la projection de $\vec{b}$ sur la perpendiculaire à $\vec{a}$ dans le plan $O\vec{a}$, $O\vec{b}$ [1].

[1] On pourrait dire que $\vec{\beta}$ est la projection de $\vec{b}$ sur cette perpendiculaire; ce serait plus simple, mais il est préférable de conserver au mot projection son acception ordinaire : c'est un nombre relatif, ce n'est pas un vecteur.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{\beta};$$

Ce lemme est évident. Pour démontrer la proposition énoncée plus haut, on peut remplacer $\vec{b}$ et $\vec{c}$ par $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$, obtenus en projetant $\vec{b}$ et $\vec{c}$

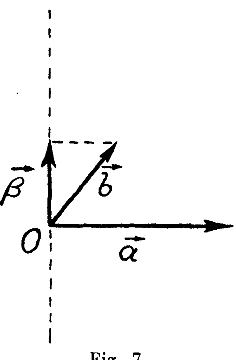


Fig. 7.

sur un plan perpendiculaire à $\vec{a}$, que nous choisirons comme plan de la figure. Si l'on remarque que $\vec{b} + \vec{c}$ se projette suivant $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$, la proposition à démontrer revient à faire voir que

$$\vec{a} \times (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \times \vec{\beta} + \vec{a} \times \vec{\gamma}.$$

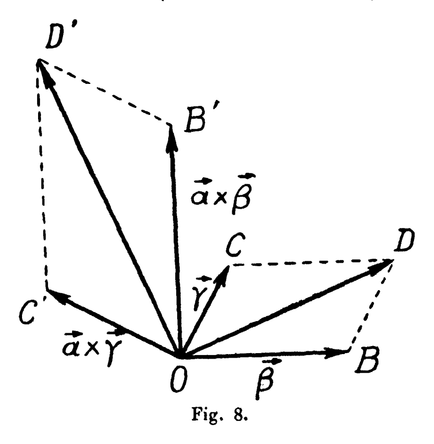


Fig. 8.

$\vec{a}$ est en avant du plan de la figure

On trouve $\vec{a} \times \vec{\beta}$, $\vec{a} \times \vec{\gamma}$ et $\vec{a} \times (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ en tournant $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ et $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ de 90° dans le plan de la figure et en les multipliant par le nombre a. On obtient une figure $OB'D'C'$ semblable à $OBDC$, mais

$$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'},$$

le théorème est donc démontré.

On démontre, comme en arithmétique, que le produit vectoriel de deux sommes de vecteurs s'obtient en faisant la somme des produits des termes de chaque facteur, combinés de toutes les façons possibles, mais il faut faire cette restriction : l'ordre des facteurs ne doit pas changer.

Ainsi

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}.$$

19. Si l'on rapporte les vecteurs de l'espace aux trois vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ on obtiendra les composantes du vecteur obtenu en faisant le produit vectoriel $\vec{v} \times \vec{v'}$ où

$$\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \quad \vec{v'} = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k},$$

en se fondant sur la valeur des produits vectoriels deux à deux des vecteurs de base et sur la règle qu'exprime l'égalité suivante :

$$\alpha\vec{a} \times \beta\vec{b} = \alpha\beta\vec{a} \times \vec{b}.$$

Or
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

Par suite :

$$\vec{v} \times \vec{v'} = (YZ' - ZY')\vec{i} + (ZX' - XZ')\vec{j} + (XY' - YX')\vec{k},$$

ce qu'on peut écrire sous la forme symbolique aisée à interpréter et amie de la mémoire :

$$(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \times (X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}$$

où l'on imagine qu'on doive développer le déterminant suivant les éléments de la première ligne.

20. La mécanique introduit la notion de *moment* d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un point P ; c'est un vecteur lié $\vec{M}$ défini par la relation

$$\vec{M} = \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{AB} ;$$

en cartésien, c'est-à-dire avec des coordonnées rectangulaires, si

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\overrightarrow{OP} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k},$$

et si $\overrightarrow{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x' & y - y' & z - z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Un autre exemple, où la notion de produit vectoriel est utile, est donné par la cinématique du corps solide. Soit un corps solide tournant autour d'un axe avec une vitesse angulaire ω ; portons le long de cet axe un vecteur $\vec{\omega}$ de longueur ω et dans un sens tel que, pour un observateur placé le long de l'axe et orienté comme $\vec{\omega}$, le solide tourne dans le sens positif, c'est-à-dire de la droite vers la gauche. Soit O l'origine de $\vec{\omega}$, la vitesse $\vec{v}$ d'un point A du solide se calcule alors par la formule :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}$$

ou si $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

En effet, on sait que $\vec{v}$ = moment de $\vec{\omega}$ relativement à A

$$= \overrightarrow{AO} \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Si $\quad \vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}, \quad$ et $\quad \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (qz - ry)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (py - qx)\vec{k}.$$

C'est là une formule démontrée dans les cours de mécanique.

Produit mixte.

21. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, trois vecteurs formant un trièdre direct (non forcément trirectangle). On peut former divers produits avec eux :

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ n'a pas de sens, ce peut être $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ ou $(\vec{a}\vec{c})\vec{b}$ ou $(\vec{b}\vec{c})\vec{a}$;

$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$ n'a de sens que si on l'entend $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, c'est ce que nous ferons ; on appelle cette expression le *produit mixte* de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, c'est un *nombre*.

Si $\vec{a}\times\vec{b}$ est un vecteur qui fait un angle aigu avec $\vec{c}$, la projection de $\vec{c}$ sur l'axe qui le porte est la hauteur du parallélipipède construit sur $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (censés avoir la même origine), dès lors, puisque la mesure de $\vec{a}\times\vec{b}$ est celle de l'aire de sa base construite sur $\vec{a}$, $\vec{b}$, le produit mixte est la mesure du volume du dit parallélipipède.

Si on change le sens de $\vec{c}$, le signe de ce produit mixte change, mais l'orientation du trièdre $O\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ change aussi. Convenons dès lors de donner un signe au volume d'un parallélipipède dont on prend les trois arêtes aboutissant à un même sommet dans un ordre déterminé, le signe $+$ si cet ordre définit un trièdre direct, le signe $-$ dans le cas contraire.

Avec cette convention

$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=$ volume du parallélipipède construit sur $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ issus de O.

Mais un raisonnement tout semblable aurait donné le même résultat pour la double opération $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$, donc :

Dans un produit mixte, on peut intervertir le point et la croix sans en changer la valeur :

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}\,;$$

On représente souvent ce produit mixte par la notation $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$. Il n'y a pas à craindre d'ambiguïté car $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ n'a pas de sens en soi.

En cartésien, si

$$\vec{a}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$$

$$\vec{b}=\alpha'\vec{i}+\beta'\vec{j}+\gamma'\vec{k}$$

$$\vec{c}=\alpha''\vec{i}+\beta''\vec{j}+\gamma''\vec{k}.$$

On aura

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{vmatrix}\cdot\left(\alpha''\vec{i}+\beta''\vec{j}+\gamma''\vec{k}\right)$$

et l'on trouve immédiatement

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

Double produit vectoriel.

22. Etant donnés trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, on peut encore se proposer de les multiplier entre eux d'une autre manière : deux signes $\times$ indiqueront cette nouvelle opération. Mais, parce que la multiplication vectorielle n'est pas associative, la notation $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ n'a pas de sens. Ce sera $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ que nous calculerons. Le résultat est un vecteur qui est perpendiculaire à $\vec{a}$ et à la perpendiculaire commune de $\vec{b}$ et de $\vec{c}$. C'est donc un vecteur situé dans un plan parallèle à $\vec{b}$ et $\vec{c}$. On aura donc

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}, \tag{1}$$

λ et μ étant deux nombres à trouver.

On le fait aisément en calculant d'abord le double produit particulier $\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. En prenant le plan de $\vec{b}$ et $\vec{c}$, supposés avoir même origine, comme plan de la figure, ce produit est un vecteur situé dans ce plan, soit $\overrightarrow{OS}$ évidemment perpendiculaire à $\vec{b}$. Mais on a, si θ est l'angle de $\vec{b}$ et de $\vec{c}$:

$$|\overrightarrow{OS}| = b^2 c \sin\theta, \text{ et } \vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QS},$$

$\overrightarrow{QS}$ étant parallèle à $\vec{b}$; d'ailleurs :

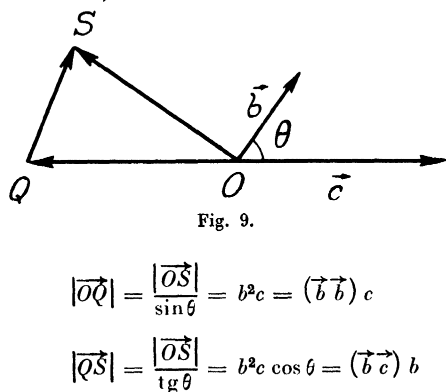


Fig. 9.

$$|\overrightarrow{OQ}| = \frac{|\overrightarrow{OS}|}{\sin\theta} = b^2 c = (\vec{b}\,\vec{b})\,c$$

$$|\overrightarrow{QS}| = \frac{|\overrightarrow{OS}|}{\operatorname{tg}\theta} = b^2 c \cos\theta = (\vec{b}\,\vec{c})\,b$$

et par suite

$$\overrightarrow{OQ} = -(\vec{b}\,\vec{b})\,\vec{c}, \quad \overrightarrow{QS} = (\vec{b}\,\vec{c})\,\vec{b},$$

dès lors :

$$\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b}\,\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{b})\vec{c}; \tag{2}$$

et de même

$$\vec{c} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c}\,\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{c})\,\vec{c}. \tag{3}$$

Multiplions scalairement les deux membres de (1) par $\vec{b}$ et, en considérant $(\vec{b} \times \vec{c})$ comme un facteur du produit mixte $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$, intervertissons le point et la croix ; on aura, en appliquant (2)

$$\lambda\,(\vec{b}\,\vec{b}) + \mu\,(\vec{b}\,\vec{c}) = \vec{a}\left[(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{b}\right] = \vec{a}\left[-(\vec{b}\,\vec{c})\vec{b} + (\vec{b}\,\vec{b})\vec{c}\right];$$

en multipliant scalairement par $\vec{c}$ et en tenant compte de (3), on a une relation analogue. Dès lors pour définir λ et μ, on a les deux équations :

$$\lambda\,(\vec{b}\,\vec{b}) + \mu\,(\vec{b}\,\vec{c}) = (\vec{a}\,\vec{c})\,(\vec{b}\,\vec{b}) - (\vec{a}\,\vec{b})\,(\vec{b}\,\vec{c})$$

$$\lambda\,(\vec{b}\,\vec{c}) + \mu\,(\vec{c}\,\vec{c}) = (\vec{a}\,\vec{c})\,(\vec{b}\,\vec{c}) - (\vec{a}\,\vec{b})\,(\vec{c}\,\vec{c}).$$

Le déterminant des coefficients des inconnues est $b^2c^2 - b^2c^2\cos^2\theta = b^2c^2\sin^2\theta$ qui est différent de zéro si $\vec{b}$ ou $\vec{c}$ ne sont pas des vecteurs nuls ou si leurs supports ne sont pas parallèles. D'ailleurs, dans l'un ou l'autre de ces cas, le double produit est évidemment nul et notre calcul serait sans objet. Dès lors que les deux équations précédentes sont indépendantes,

$$\lambda = \vec{a}\,\vec{c} \quad \text{et} \quad \mu = -\,\vec{a}\,\vec{b},$$

par conséquent :

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\,\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c};$$

et cette formule est valable dans tous les cas, même si $bc\sin\theta = 0$.

On a de plus la formule intéressante

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

Produits de quatre facteurs.

23. Deux nouvelles formules vont être utiles pour les applications.

$$\text{I.} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \nu\,\vec{c} + \rho\,\vec{d}$$

mais aussi $= \sigma\,\vec{a} + \tau\,\vec{b}$. On tirera de là l'expression de $\vec{d}$ en fonction linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

On a (*cf* § 21) :

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})\vec{c}-(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\vec{d}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=-(\vec{c}\times\vec{d}\cdot\vec{b})\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{d}\cdot\vec{a})\vec{b}=-(\vec{c}\,\vec{d}\,\vec{b})\vec{a}+(\vec{c}\,\vec{d}\,\vec{a})\vec{b}$$

d'où :

$$(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})\vec{a}+(\vec{a}\,\vec{d}\,\vec{c})\vec{b}+(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})\vec{c}-(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\vec{d}=0$$

$$\vec{d}=\frac{(\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c})}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})}\vec{a}+\frac{(\vec{d}\,\vec{c}\,\vec{a})}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})}\vec{b}+\frac{(\vec{d}\,\vec{a}\,\vec{b})}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})}\vec{c}; \qquad (1)$$

les coefficients de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont des quotients de volumes.

Dans le cas particulier où $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$, $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ vaut 1 et $(\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c})=(\vec{d}\,\vec{j}\,\vec{k})=(\vec{d}\,\vec{i})=X$, etc.

II. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{a}\left[(\vec{b}\,\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\,\vec{c})\vec{d}\right]$

d'où :

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}(\vec{a}\,\vec{c}) & (\vec{b}\,\vec{c})\\ (\vec{a}\,\vec{d}) & (\vec{b}\,\vec{d})\end{vmatrix} \qquad (2)$$

Applications à la trigonométrie sphérique.

24. Cette dernière formule permet d'obtenir immédiatement les relations fondamentales de la trigonométrie sphérique. Soient $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ trois vecteurs unités issus d'un point O et formant un trièdre direct ; leurs extrémités sont les sommets d'un triangle sphérique, dont les côtés seront nommés a, b, c et les angles A, B, C.

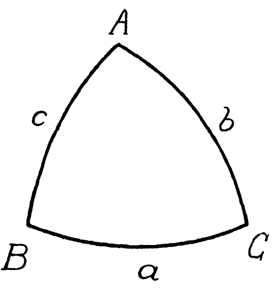


Fig. 10.

Dans la formule (2), § 23, faisons $\vec{a} = \vec{\alpha}$, $\vec{b} = \vec{\beta}$, $\vec{c} = \vec{\gamma}$, $\vec{d} = \vec{\alpha}$:

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) = \begin{vmatrix} (\vec{\alpha}\vec{\gamma}) & (\vec{\beta}\vec{\gamma}) \\ (\vec{\alpha}\vec{\alpha}) & (\vec{\beta}\vec{\alpha}) \end{vmatrix};$$

mais $(\vec{\alpha}\vec{\gamma}) = \cos b$, $\vec{\beta}\vec{\gamma} = \cos a$, $\vec{\beta}\vec{\alpha} = \cos c$, $\alpha^2 = 1$, de plus, $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ est un vecteur perpendiculaire à la face OAB, sa longueur est $\sin c$; $\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$ est perpendiculaire à la face OAC et sa longueur est $\sin b$. Ces deux vecteurs percent la sphère aux points C' et B' (en admettant que O est leur origine), qui sont deux sommets du triangle $A'B'C'$ polaire de ABC (voir p. ex. Rouché et Comberousse, « Traité de géométrie», t. II, p. 173) l'angle de ces deux vecteurs est le supplément de l'angle A du triangle sphérique donné, dès lors

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) = \sin c \sin b \cos(\pi - A)$$

et par conséquent

$$\cos b \cos c - \cos a = - \sin b \sin c \cos A,$$

d'où :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

et les deux relations analogues.

La formule (I) § 23 développée et appliquée aux vecteurs $\vec{a} = \vec{\alpha}$, $\vec{b} = \vec{\beta}$, $\vec{c} = \vec{\gamma}$, $\vec{d} = \vec{\alpha}$:

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) = -(\vec{\alpha}\vec{\beta}\vec{\gamma})\vec{\alpha}$$

conduit bien aisément à la relation des sinus :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

nous laissons au lecteur le soin de l'établir.

Remarques sur la division.

25. Il est clair que la relation

$$\vec{a}\vec{x} = s$$

où $\vec{a}$ est un vecteur et s un nombre donnés ne définit le vecteur $\vec{x}$ qu'à un vecteur additif près perpendiculaire à $\vec{a}$. De même l'équation :

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{v}$$

$\vec{v}$ étant donné, ne définit $\vec{x}$ qu'à un vecteur additif près parallèle à a. Mais les deux équations définissent ensemble en général un seul vecteur $\vec{x}$, car, si $\vec{x}_0$ est une solution particulière de la seconde équation,

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a}$$

en est la solution générale ; en substituant dans la première, on trouve

$$\lambda = \frac{s - \vec{a}\vec{x}_0}{a^2},$$

et

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \frac{s - \vec{a}\vec{x}_0}{a^2}\vec{a}$$

est l'unique solution du système proposé.

Ce sont de telles remarques qui conduisent à la théorie des quaternions dont nous n'aurons pas à tirer parti dans ces leçons.

Exercices.

1. Montrer qu'on peut construire un triangle dont les côtés sont égaux et parallèles aux médianes d'un triangle donné.

2. Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

3. Les milieux des côtés d'un quadrilatère gauche sont les sommets d'un parallélogramme.

4. Un plan coupe les 6 arêtes d'un tétraèdre en 6 points ; on considère sur chaque arête le conjugué harmonique de chacun de ces points par rapport aux sommets de l'arête ; montrer que les 6 plans menés par les 6 nouveaux points et les arêtes opposées se coupent en un point.

5. Dans un tétraèdre, les droites qui joignent chaque sommet au centre de gravité de la face opposée sont concourantes.

6. Un triangle ABC est coupé par une transversale DEF (D est sur BC, E sur CA, F sur AB), montrer que l'on a

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = +1.$$

7. Démontrer les propositions relatives aux bissectrices d'un triangle.

8. Trouver la droite passant par un point donné et coupant deux droites données.

9. Les médiatrices d'un triangle se coupent en un même point.

10. Equation de la droite perpendiculaire à deux vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$, et passant par un point A.

11. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ étant deux vecteurs de même origine, quelle est la signification de l'expression

$$\vec{a} - \frac{(\vec{a}\,\vec{b})\vec{b}}{b^2}\ ?$$

12. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ étant trois vecteurs non-parallèles à un même plan, montrer que la solution unique du système

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = A, \quad \vec{b} \cdot \vec{x} = B, \quad \vec{c} \cdot \vec{x} = C,$$

où A, B, C sont trois nombres donnés, est

$$\vec{x} = \frac{A\vec{b} \times \vec{c} + B\vec{c} \times \vec{a} + C\vec{a} \times \vec{b}}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})}.$$

13. Effectuer les produits suivants :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{c} \times \vec{d}) \times (\vec{e} \times \vec{f})]; \quad \vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})].$$

14. Trouver la longueur de la perpendiculaire commune à deux droites données parallèles à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et issues de deux points C et D.

15. On mène par le sommet d'un angle trièdre une droite dans chaque face, perpendiculairement à l'arête opposée, ces trois droites sont dans un même plan.

Le lecteur complétera ces exercices en reprenant les théorèmes de la géométrie analytique et en cherchant à les démontrer par la méthode vectorielle.

CHAPITRE II

Géométrie infinitésimale. Courbes gauches.

Vecteur variable.

26. Etablissons une correspondance entre les diverses valeurs d'un paramètre réel t comprises dans un intervalle (a, b) et un vecteur variable $\vec{r}$ de telle façon qu'à une valeur particulière de t corresponde un et un seul vecteur $\vec{r}$ bien déterminé. On dira alors que $\vec{r}$ est fonction de t, ce qu'on écrira

$$\vec{r} = \vec{f}(t) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = \vec{r}(t).$$

Cette fonction sera dite *continue* en $t = t_1$ si, à tout nombre positif ε arbitrairement petit, on peut faire correspondre un nombre η tel que

$$\left|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_1)\right| < \varepsilon$$

si

$$|t - t_1| < \eta.$$

On dit aussi que $\vec{r}(t)$ a pour limite $\vec{r}(t_1)$ lorsque t tend vers t_1 d'une manière quelconque. Une fonction $\vec{r}(t)$ est continue dans l'intervalle (a, b) si elle est continue pour chaque valeur de t, située dans cet intervalle.

On peut définir la *dérivée* de $\vec{r}(t)$ qui sera encore un vecteur fonction de t. Si la limite du rapport $\dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_1)}{t - t_1}$ existe, lorsque $t - t_1$ tend vers zéro d'une manière quelconque, c'est elle qu'on appelle la dérivée $\vec{r}'(t)$.

On peut poursuivre, comme en analyse, et définir les dérivées successives $\vec{r}''(t)$, $\vec{r}'''(t)$,...

Le calcul des dérivées de vecteurs variables suit des règles parfaitement semblables, voire identiques, aux règles de dérivations des fonctions scalaires.

Ainsi

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u} \pm \vec{v}\right) = \vec{u}' \pm \vec{v}'$$

$$\frac{d}{dt}\left(m(t)\,\vec{r}(t)\right) = m'(t)\,\vec{r}(t) + m(t)\,\vec{r}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \vec{u}' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}'\,;$$

dans cette dernière formule, on doit faire attention à l'ordre des facteurs.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) = \vec{u}' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}\right) = \left(\vec{u}'\,\vec{v}\,\vec{w}\right) + \left(\vec{u}\,\vec{v}'\,\vec{w}\right) + \left(\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}'\right).$$

Si $\vec{u}$ est fonction de t et si t est fonction (scalaire) de s, le théorème des dérivées des fonctions de fonction s'écrit

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}.$$

Toutes ces formules se démontrent bien aisément.

On dira que $\vec{r}(t)$ est un vecteur *fonction analytique* de t dans le voisinage de la valeur t_1, si pour les valeurs de t suffisamment voisines de t_1 la fonction $\vec{r}(t)$ est définie par un développement convergent de la forme :

$$\vec{r}(t) = \vec{a}_o + \vec{a}_1(t - t_1) + \vec{a}_2(t - t_1)^2 + \ldots + \vec{a}_n(t - t_1)^n + \ldots,$$

les $\vec{a}_i$ étant des vecteurs indépendants de t (mais non de t_1) et la convergence d'une série pareille se définissant, grâce à la notion de limite d'un vecteur variable, d'une manière analogue à la convergence d'une série de fonctions scalaires.

On voit, sans peine, que dans ce cas $\vec{r}(t)$ possède en $t = t_1$ des dérivées de tous les ordres, et l'on a :

$$\vec{r}(t_1) = \vec{a}_0$$
$$\vec{r}'(t_1) = \vec{a}_1$$
$$\vec{r}''(t_1) = 2\vec{a}_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{r}^{(n)}(t_1) = n\,!\,\vec{a}_n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

et dès lors

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_1) + \frac{\vec{r}'(t_1)}{1\,!}(t - t_1) + \frac{\vec{r}''(t_1)}{2\,!}(t - t_1)^2 + \ldots + \frac{\vec{r}^{(n)}(t_1)}{n!}(t - t_1)^n + \ldots$$

est le développement taylorien de la fonction analytique $\vec{r}(t)$ dans le voisinage de t_1.

Courbes gauches.

27. Soit donnée une fonction $\vec{r}(t)$; imaginons que tous les vecteurs $\vec{r}(t)$ aient la même origine O, leurs extrémités P décriront un certain lieu. Supposons que pour toutes les valeurs de t_1 comprises dans l'intervalle (a, b), $\vec{r}(t)$ soit développable comme il a été dit ci-dessus, P décrira une courbe gauche, ou mieux un arc de courbe gauche qui sera dit un arc *analytique*. Cet arc analytique sera de plus *régulier*, si pour aucune valeur de t dans cet intervalle, $\vec{r}'(t)$ n'est un vecteur nul. Les points P de cet arc seront des points *ordinaires* ou *réguliers*. Dans la suite, nous ne nous occuperons que d'arcs analytiques et réguliers ; nous laisserons de côté l'étude des points *singuliers* des courbes gauches. Si $\vec{r} = \vec{r}(t)$ est l'équation d'une courbe, nous ne nous soucierons que des valeurs de t dans le voisinage desquelles $\vec{r}(t)$ est analytique, et $\vec{r}'(t) \neq 0$. Il serait facile de rendre les hypothèses moins restrictives ; il suffit, par exemple, pour la théorie de la courbure, de supposer que $\vec{r}''(t)$ existe et que $\vec{r}'(t) \neq 0$; pour la torsion, il faut encore supposer que $\vec{r}'''(t)$ existe.

28. Soit A un point d'une courbe gauche. Choisissons sur la courbe un sens de parcours, grâce auquel nous définirons l'*abscisse curviligne* d'un point P quelconque, ou l'*arc AP*, comme un nombre relatif. Prenons, par exemple, le sens qui correspond aux valeurs croissantes de t, et supposons que lorsque t varie de a à t le point

correspondant de la courbe aille de A à P toujours dans le même sens, l'intégrale

$$\int_a^t \left|\vec{r}'(t)\right| dt$$

existe si la courbe est analytique, elle mesure précisément l'abscisse curviligne de P ou l'arc $s = \widehat{AP}$. Si, lorsque t variant toujours dans le même sens, le point P revient en arrière, il faudra changer le signe de $\left|\vec{r}'(t)\right|$ pour que l'intégrale précédente représente toujours l'abscisse curviligne de P. On a donc pour l'élément d'arc la relation

$$ds = \pm \left|\vec{r}'(t)\right| dt,$$

le signe étant précisé comme on vient de le voir.

En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

$$ds = \pm \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Il est dès lors préférable d'utiliser le paramètre de représentation s au lieu de t ; c'est ce que nous ferons pour étudier les propriétés différentielles des courbes gauches. Il sera entendu qu'on a choisi une origine A sur chaque courbe étudiée et, de cette origine, on compte les arcs s ; $\vec{r}$ est analytique en s si elle l'était en t, car $\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} : \frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\vec{r}}{ds} \neq 0$ si $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0$, car $\frac{ds}{dt}$ ne saurait être infini, avec les hypothèses formulées.

Trièdre principal.

29. Soit donc $\vec{r} = \vec{r}(s)$, l'équation vectorielle d'une courbe gauche Γ. Le vecteur

$$\vec{t} = \vec{r}'(s)$$

est la limite du vecteur variable

$$\frac{\vec{r}(s_1) - \vec{r}(s)}{s_1 - s}$$

lorsque s_1 tend vers s. Il est manifestement de longueur un, car, sur les arcs analytiques et réguliers, le rapport de la corde à l'arc qu'elle sous-

tend tend vers l'unité lorsque l'arc tend vers zéro. Son support est une droite dite *tangente* à la courbe au point $P(s)$. Dorénavant nous dirons que $\vec{t}$ est le vecteur-tangente ou la tangente. Il est dirigé dans le sens des arcs croissants ; si on change le sens des arcs, $\vec{t}$ change de sens.

Reportons, à partir d'un point fixe, O par exemple, les vecteurs $\vec{t}$; à chaque point P de la courbe Γ correspondra un vecteur $\vec{t}$ et l'extrémité Q du vecteur équipollent mené de O décrira, sur une sphère de rayon unité, une courbe qu'on nomme l'*indicatrice des tangentes* de Γ. Ce vecteur $\vec{t}(s)$ a une dérivée $\frac{d\vec{t}}{ds}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{OQ}$, dont le support et le sens

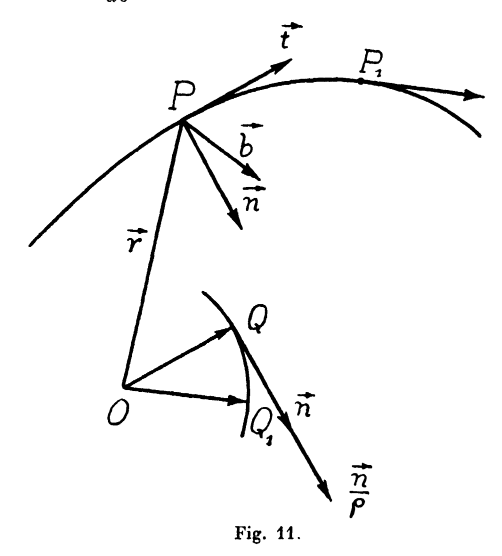


Fig. 11.

définissent un vecteur unité $\vec{n}$ qu'on appelle la *normale principale* à Γ en P, lorsqu'on ramène son origine en P. Donc, par définition,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$$

$\frac{1}{\rho}$ étant un nombre positif égal à la longueur de $\frac{d\vec{t}}{ds}$.

On construit encore en P un vecteur $\vec{b}$, la *binormale* à Γ en P, qu'on définit par la relation

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} ;$$

les trois vecteurs $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ forment donc un trièdre trirectangle direct qu'on appelle le *trièdre principal* ou le *trièdre de Serret* de la courbe Γ au point P. Le plan $P\vec{t}$, $P\vec{n}$ est le *plan osculateur* à la courbe en P, le plan de $\vec{n}$ et $\vec{b}$ en est le *plan normal* et celui de $\vec{t}$ et $\vec{b}$ s'appelle le *plan rectifiant.*

30. Soit σ l'arc compté sur l'indicatrice des tangentes à partir d'une origine arbitraire et dans un sens tel que σ croisse lorsque s croît ; σ est en effet une fonction de s. L'élément d'arc $d\sigma$, pris en valeur absolue, mesure l'angle de deux tangentes infiniment voisines. Or

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds}$$

mais

$$\frac{d\sigma}{ds} = \lim \frac{\text{angle de deux tangentes}}{\text{arc de } \Gamma \text{ entre les points de contact}} ;$$

on appelle cette limite la *courbure* de Γ en P ; on la représente par $\frac{1}{\rho}$ et ρ est une longueur qu'on nomme le *rayon de courbure* à Γ en P. Cependant $\frac{d\vec{t}}{d\sigma}$ est le vecteur unité tangent à l'indicatrice en Q, c'est $\vec{n}$.

31. Il est utile de considérer en même temps que l'indicatrice des tangentes, celle des normales principales et celle des binormales. Mais,

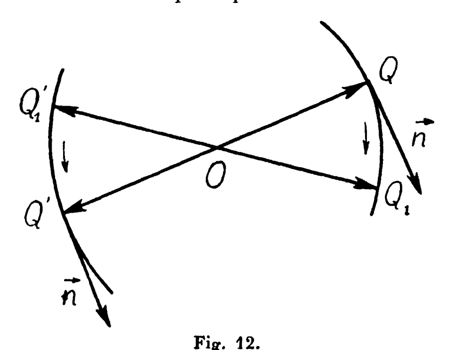


Fig. 12.

avant tout, il convient de remarquer que le sens de la normale principale est indépendant du sens choisi pour les arcs croissants. Si on change ce sens, en effet, $\vec{t}$ change de sens ; la nouvelle indicatrice des tangentes est le lieu des points diamétralement opposés aux points

de l'ancienne, mais ce nouveau lieu est parcouru non de Q' vers Q'_1 (symétriques de Q et Q_1) mais de Q'_1 vers Q' ; les tangentes en Q et en Q' sont alors parallèles et de même sens (fig. 12). Le sens de la normale principale est donc indépendant de la convention faite sur le signe de s. Puisque $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$, le sens de $\vec{b}$ est changé lorsque l'on change cette convention.

La famille de trièdres trirectangles ramenés à avoir O comme sommet est formée par une succession de positions d'un trièdre trirectangle direct T. Convenons de considérer s comme une variable mesurant le temps ; lorsque s varie, le trièdre se meut en conservant son sommet, soit $T(s)$ sa position pour l'instant s. Un point B lié à ce trièdre aura,

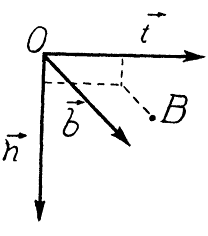


Fig. 13.

relativement à l'espace fixe dans lequel on étudie Γ, et à l'instant s, une certaine vitesse $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{ds}$. On va chercher les projections de $\vec{v}$ sur les 3 axes $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ du trièdre $T(s)$. Il faut entendre que, du trièdre $T(s)$ considéré comme fixe, se détache un trièdre identique qui, à l'instant s, a la position du trièdre $T(s + ds)$.

On a vu au § 20 qu'il existe à chaque instant un vecteur $\vec{\omega}$ issu de O tel que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}$; la distribution des vitesses des points B est à chaque instant celle qui serait due à un mouvement de rotation du solide autour de l'axe qui porte $\vec{\omega}$, ω mesurant la vitesse angulaire due à cette rotation.

On a donc :

$$\frac{d\overrightarrow{OB}}{ds} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}.$$

On appellera ce vecteur $\vec{\omega}$ le *vecteur de Darboux.*

Si l'on veut obtenir les projections de $\vec{v}$ sur les trois axes $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, il suffira de développer

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{n} & \vec{b} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$\vec{\omega} = \alpha\vec{t} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OB} = \xi\vec{t} + \eta\vec{n} + \zeta\vec{b}.$$

Formules de Frenet.

32. On appliquera la formule précédente aux points extrémités de $\vec{t}$, de $\vec{n}$ et de $\vec{b}$, arêtes des trièdres de sommet O. On aura tout d'abord :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{n} & \vec{b} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \gamma\vec{n} - \beta\vec{b},$$

mais on sait que $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, donc $\beta = 0$, *le vecteur de Darboux est normal à* $\vec{n}$; de plus $\gamma = \frac{1}{\rho}$.

Il est plus simple de prendre d'abord $\frac{d\vec{b}}{ds}$; on a $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 1$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\alpha\vec{n}.$$

Mais $d\vec{b}$ est l'angle de deux binormales infiniment voisines, c'est aussi l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins. Le rapport $\frac{|d\vec{b}|}{ds}$ est donc la limite du rapport de l'angle des plans osculateurs en P et P' à l'arc $\widehat{PP'}$ lorsque P' tend vers P ; on appelle cette limite la *torsion* de la courbe Γ en P, soit $\frac{1}{\tau}$. On convient de donner un signe à la torsion ; $d\vec{b}$ est parallèle à $\vec{n}$: si $d\vec{b}$ a le même sens que $\vec{n}$, la torsion sera négative, si $d\vec{b}$ a le sens contraire au sens de $\vec{n}$, elle sera positive [1]. Dès lors, puisque

$$\left|\frac{d\vec{b}}{ds}\right| = \left|\frac{1}{\tau}\right| = \left|-\alpha\vec{n}\right| = \left|-\alpha\right|,$$

[1] C'est la convention contraire qui est faite dans le *Cours d'Analyse* de M. Goursat.

on pourra écrire avec notre convention

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\tau}$$

et $\alpha = \frac{1}{\tau}$.

Enfin

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\gamma\vec{t} + \alpha\vec{b} = -\frac{\vec{t}}{\rho} + \frac{\vec{b}}{\tau}.$$

Les trois formules

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= \frac{\vec{n}}{\rho} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= -\frac{\vec{t}}{\rho} + \frac{\vec{b}}{\tau} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\frac{\vec{n}}{\tau} \end{aligned}\right.$$

sont les *formules de Frenet.*

En coordonnées cartésiennes, si la courbe est donnée par l'équation

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

ou paramétriquement :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

les composantes de $\vec{t}$: $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$ sont les cosinus directeurs de la tangente ; on les représente habituellement par α, β, γ. Ceux de $\vec{n}$ seront α', β', γ', et ceux de $\vec{b}$, α'', β'', γ''. Les formules de Frenet s'écrivent alors

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\alpha'}{\rho} \\ \frac{d\alpha'}{ds} &= -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha''}{\tau} \\ \frac{d\alpha''}{ds} &= -\frac{\alpha'}{\tau} \end{aligned}\right.$$

et six formules analogues en changeant

α en β et en γ

α' en β' et en γ'

α'' en β'' et en γ''.

33. Grâce aux formules de Frenet, on calcule facilement ρ et τ.

Puisque $\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{r}''(s) = \frac{\vec{n}}{\rho}$, on tire de là, en multipliant scalairement les deux équations

$$\vec{r}'' = \frac{\vec{n}}{\rho} \qquad \vec{r}'' = \frac{\vec{n}}{\rho}$$

membre à membre :

$$r''^2 = \frac{1}{\rho^2},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = \left|\vec{r}''\right|.$$

D'autre part

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\tau}.$$

donc

$$\frac{1}{\tau} = -\vec{n} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds},$$

mais

$$\vec{n} = \rho\vec{r}'' \quad \text{et} \quad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \rho\vec{r}' \times \vec{r}'',$$

$$\frac{1}{\tau} = -\rho\vec{r}'' \cdot \frac{d}{ds}\left(\rho\vec{r}' \times \vec{r}''\right)$$

$$= -\rho^2\vec{r}'' \cdot \frac{d}{ds}\left(\vec{r}' \times \vec{r}''\right) - \rho\frac{d\rho}{ds}\vec{r}'' \cdot \left(\vec{r}' \times \vec{r}''\right);$$

ce dernier produit mixte est nul ; de plus

$$\vec{r}'' \cdot \frac{d}{ds}\left(\vec{r}' \times \vec{r}''\right) = \vec{r}'' \cdot \left(\vec{r}'' \times \vec{r}''\right) + \vec{r}'' \cdot \left(\vec{r}' \times \vec{r}'''\right),$$

le premier terme du second membre est nul et par suite

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2\vec{r}'' \cdot \left(\vec{r}' \times \vec{r}'''\right) = \rho^2\left(\vec{r}'\ \vec{r}''\ \vec{r}'''\right).$$

Enfin

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\left(\vec{r}'\ \vec{r}''\ \vec{r}'''\right)}{\vec{r}'' \cdot \vec{r}''}.$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

La courbure est une expression irrationnelle, tandis que la torsion s'exprime rationnellement en fonction des dérivées de $\vec{r}$ (ou des coordonnées du point courant de la courbe Γ).

Il faut remarquer que les dérivées qui figurent dans les formules tant vectorielles que scalaires qui précèdent sont prises par rapport à l'arc s. On peut proposer au lecteur de chercher comment elles se transforment, si au lieu de l'arc on prend un paramètre de représentation t quelconque (*cf.* exercice à la fin du chapitre). Ce qu'il faut remarquer immédiatement, c'est que $\frac{d\vec{r}}{dt}$ est parallèle à la tangente $\vec{t}$, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ dépend linéairement de $\vec{t}$ et de $\vec{n}$, etc... d'une manière générale :

$$\frac{d^n\vec{r}}{dt^n} \text{ est linéaire en } \vec{t},\ \vec{n}, \ldots \frac{d^n\vec{r}}{ds^n}.$$

Développements en série de Taylor.

34. Il est clair qu'au lieu de se donner un vecteur $\vec{r}$ variable en fonction d'un paramètre t par un développement en série en t, il est préférable, du point de vue géométrique, de prendre pour argument variable l'arc s de la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{r}$. On aura

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}_1 (s - s_0) + \vec{a}_2 (s - s_0)^2 + \vec{a}_3 (s - s_0)^3 + \ldots$$

mais puisque

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)_0 \quad \vec{a}_2 = \left(\frac{1}{2!}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)_0 \quad \vec{a}_3 = \left(\frac{1}{3!}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)_0, \ldots$$

on aura, d'après les formules de Frenet :

$$\vec{a}_1 = \vec{t}_0, \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{n}_0}{2\rho_0} \quad \vec{a}_3 = \frac{1}{6}\left[-\frac{\vec{t}_0}{\rho_0^2} - \frac{\rho_0'\vec{n}_0}{\rho_0^2} + \frac{\vec{b}_0}{\rho_0\tau_0}\right], \ldots$$

On peut tirer de là des renseignements précis sur l'ordre de grandeur de la distance d'un point de la courbe à une tangente, à un plan osculateur, etc... Par exemple, si $s - s_0$ est un infiniment petit d'ordre un, la distance de $P(s)$ à la tangente en $P_0(s_0)$ est d'ordre deux[1], sa distance au plan osculateur de P_0 est $\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{b}_0 = \frac{(s - s_0)^3}{6\rho_0\tau_0}$. On peut d'ailleurs écrire $\vec{r} - \vec{r}_0 = x\vec{t}_0 + y\vec{n}_0 + z\vec{b}_0$ et l'on trouve

$$x = s - s_0 - \frac{1}{6\rho_0^2}(s - s_0)^3 + \ldots$$

$$y = \frac{1}{2\rho_0}(s - s_0)^2 - \frac{\rho_0'}{6\rho_0^2}(s - s_0)^3 + \ldots$$

$$z = \frac{1}{6\rho_0\tau_0}(s - s_0)^3 + \ldots$$

Premières notions sur les surfaces.

35. Une surface peut se définir au moyen d'un vecteur variable dépendant de deux paramètres,

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v),$$

dont l'origine est fixe. Pour simplifier l'exposé, on imaginera que cette fonction $\vec{r}$ est analytique, c'est-à-dire qu'elle est développable en série autour d'un couple de valeurs (u_0, v_0) :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}(u - u_0) + \vec{b}(v - v_0) + \vec{c}(u - u_0)^2 + \vec{d}(u - u_0)(v - v_0) + \vec{e}(v - v_0)^2 + \ldots$$

Un point P_0, tel que $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}(u_0, v_0)$, sera un point régulier de la surface si, dans le développement de $\vec{r}$ autour de (u_0, v_0), le produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ est différent de zéro.

Dans d'autres circonstances, une surface peut être définie par une équation entre $\vec{r}$ et des grandeurs géométriques données, non résolue par rapport à $\vec{r}$, en d'autres termes, par une condition à laquelle est assujetti tout point qui en fait partie. On écrira symboliquement

$$F(\vec{r}) = 0 \quad \text{ou} \quad F(\overrightarrow{OP}) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{F}(P) = 0,$$

[1] Si P_0 est un point d'inflexion, cette distance est d'ordre supérieur à deux ; dans ce cas $\frac{1}{\rho_0} = 0$.

et il faudra entendre, dans les deux premiers cas, que $\vec{r}$ ou $\overrightarrow{OP}$ sont soumis à des opérations définies en algèbre vectorielle et dont le résultat est un nombre nul. La dernière forme sera utile dans la théorie des champs.

Si on établit entre u et v une relation arbitraire, on définit sur la surface une certaine courbe. L'ensemble des courbes passant par P_0 permet de considérer un ensemble de droites, leurs tangentes, qui sont parallèles au plan

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Ce plan passant par P_0 est dit le *plan tangent* à la surface en P_0. Il est bien déterminé en tout point régulier puisque $\vec{a}$ n'est pas parallèle à $\vec{b}$ en un tel point.

On voit aisément que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$,... sont, à des facteurs près, des dérivées partielles de $\vec{r}$, dont la définition est en tout point semblable à la définition des dérivées partielles d'une fonction scalaire :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \qquad \vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} \qquad \vec{d} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} \qquad \vec{e} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial v^2} \cdots$$

La normale au plan tangent est parallèle au vecteur $\vec{a} \times \vec{b}$; on prendra une normale unité $\vec{N}$, définie par l'équation

$$\vec{N} = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|},$$

ce sera ce vecteur qu'on appellera la *normale* à la surface.

Eléments de la théorie du contact.

36. Soient deux courbes C_1 et C_2

$$\vec{r}_1 = \vec{f}(t),$$
$$\vec{r}_2 = \vec{g}(u),$$

supposons qu'elles aient un point commun P_0 correspondant aux valeurs $t = t_0$ et $u = u_0$ de leurs paramètres de représentation. Etablis-

sons entre ces deux courbes une correspondance ponctuelle $P_1 \to P_2$ de telle façon que arc $P_0P_1 =$ arc P_0P_2. En désignant par s l'arc compté à partir de P_0, on pourra écrire

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(s), \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_2(s)$$

et les points correspondants P_1 et P_2 sont ceux pour lesquels le paramètre s a la même valeur dans ces deux équations.

On dit que les deux courbes C_1 et C_2 ont un *contact d'ordre* n en P_0 si les $n+1$ équations suivantes sont vérifiées :

$$\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0), \quad \vec{r}_1'(0) = \vec{r}_2'(0) \ldots \quad \vec{r}_1^{(n)}(0) = \vec{r}_2^{(n)}(0)$$

et si l'on a :

$$\vec{r}_1^{(n+1)}(0) \neq \vec{r}_2^{(n+1)}(0).$$

Cela revient à dire que les développements en séries de $\vec{r}_1$ et de $\vec{r}_2$ sont identiques jusqu'aux termes en s^n, ils diffèrent à partir des termes en s^{n+1}. Ou encore

$$\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s) = s^{n+1}[\vec{A} + \vec{B}s + \ldots], \; A \neq 0,$$

ce qui montre que la distance de deux points correspondants P_1 et P_2 est d'ordre $n+1$ par rapport à l'arc P_0P_1. On voit aussi que les deux courbes C_1 et C_2 ont $n+1$ points d'intersection confondus en un seul.

Les équations qui expriment les conditions du contact s'interprètent géométriquement d'une manière simple, tout au moins jusqu'à l'ordre trois ; on a en P_0 :

$$\vec{t}_1 = \vec{t}_2$$

$$\frac{\vec{n}_1}{\rho_1} = \frac{\vec{n}_2}{\rho_2}$$

$$\frac{\vec{t}_1}{\rho_1^2} + \frac{\rho_1'\vec{n}_1}{\rho_1^2} - \frac{\vec{b}_1}{\rho_1\tau_1} = \frac{\vec{t}_2}{\rho_2^2} + \frac{\rho_2'\vec{n}_2}{\rho_2^2} - \frac{\vec{b}_2}{\rho_2\tau_2},$$

c'est-à-dire que C_1 et C_2 ont la même tangente en P_0, la même normale principale (donc le même plan osculateur, et la même binormale) et la même courbure, que leurs torsions y sont égales ainsi que les dérivées de leurs courbures par rapport à l'arc.

37. On peut définir aussi le contact d'une courbe et d'une surface en un point qui leur est commun. Si, par ce point, on peut tracer sur la surface une courbe qui ait avec la courbe donnée un contact d'ordre

n, sans qu'il soit possible d'y tracer une courbe ayant un contact d'ordre supérieur à n, on dit que la courbe et la surface ont en ce point un contact d'ordre n. Il est clair dès lors que la courbe et la surface ont $n+1$ points communs qui sont confondus en un seul. Supposons que la surface soit donnée par l'équation

$$F(\vec{r}) = 0, \tag{1}$$

et la courbe par l'équation

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}_1(t - t_0) + \vec{a}_2(t - t_0)^2 + \dots ; \tag{2}$$

si l'on substitue dans (1) à $\vec{r}$ l'expression (2), on peut obtenir une identité, ce qui signifiera que la courbe est tout entière sur la surface; mais en général, on obtiendra une fonction de t qui s'écrira

$$A_0 + A_1(t - t_0) + A_2(t - t_0)^2 + \dots$$

Supposons que

$$\begin{aligned} A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0 \\ A_{n+1} \neq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Alors $F(\vec{r})$, pour $\vec{r}$ donné par (2), se réduit à :

$$(t - t_0)^{n+1}\left[A_{n+1} + A_{n+2}(t - t_0) + \dots\right]$$

Or cette expression s'annule pour $n+1$ valeurs de t confondues avec t_1, ce qui veut dire[1] que les équations (3) expriment les conditions du contact d'ordre n de la courbe avec la surface.

Courbes et surfaces osculatrices à une courbe donnée.

38. Une courbe dépendant de k paramètres $a_1, a_2 \dots a_k$ est osculatrice à une courbe donnée C, en un point P, si l'on a déterminé les k paramètres de façon que les deux courbes aient en P un contact aussi élevé que possible.

Les droites de l'espace dépendent de 4 paramètres ; en écrivant qu'une d'entre elles coupe la courbe donnée en un point donné , on fixe deux de ces paramètres, car toutes les droites issues d'un point ne dépen-

[1] Il suffit de répéter ici un raisonnement bien souvent fait en géométrie analytique ; ce n'est que pour éviter des redites fastidieuses que nous renonçons à rappeler toutes les articulations de ce raisonnement.

dent que de deux paramètres ; on fixera ces deux derniers en écrivant que la droite est tangente à la courbe. Ainsi la tangente à une courbe en est la droite osculatrice.

Un cercle de l'espace dépend de six paramètres. Il sera osculateur en un point d'une courbe gauche s'il passe par ce point, si sa tangente en ce point est la tangente $\vec{t}$ à la courbe, si sa normale principale y est la même que celle de la courbe et si sa courbure est égale à $\frac{1}{\rho}$. On voit donc que les six paramètres sont déterminés par ces conditions. Le cercle osculateur est dans le plan osculateur, son centre est le point C tel que $\overrightarrow{PC} = \rho\vec{n}$, il est sur $\vec{n}$, son rayon est ρ. Le contact est dès lors d'ordre trois. Il peut être d'ordre supérieur en des points particuliers de la courbe.

Un examen plus précis et — il faut en convenir — rendu plus aisé par les équations cartésiennes, permet de montrer qu'une courbe dépendant de $2n + 2$ paramètres est osculatrice à une courbe gauche donnée si le contact est d'ordre $n + 1$.

39. Une surface dépendant de $n + 1$ paramètres est osculatrice à une courbe en un point donné si on a déterminé les paramètres de façon qu'elle ait en ce point avec la courbe un contact d'ordre n.

On voit sans peine que le plan osculateur en un point P_0 d'une courbe y a bien un contact d'ordre deux avec la courbe. D'abord le plan passe par P_0, son équation est

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{a} = 0,$$

où $\vec{a}$ est un vecteur dont la direction, qui seule importe, est inconnue. On remplace $\vec{r}$ par son développement au voisinage de P_0 et on écrit que les coefficients de $s - s_0$ et $(s - s_0)^2$ sont nuls :

$$\vec{t} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\frac{\vec{n}}{2\rho} \cdot \vec{a} = 0$$

donc $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{t}$ et à $\vec{n}$: $\vec{a} = \vec{b}$.

Une sphère dépend de quatre paramètres, elle pourra avoir un contact d'ordre trois avec une courbe en un point donné, elle sera alors la *sphère osculatrice* à la courbe en ce point. Soit

$$(\vec{r} - \vec{R})^2 - a^2 = 0$$

l'équation d'une sphère de centre S, avec $\overrightarrow{OS}=\vec{R}$, et de rayon a. On remplace[1]

$$\vec{r} \text{ par } \vec{r}_0+\vec{t}(s-s_0)+\frac{\vec{n}}{2\rho}(s-s_0)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{\vec{t}}{\rho^2}-\frac{\rho'\vec{n}}{\rho^2}+\frac{\vec{b}}{\rho\tau}\right)(s-s_0)^3+\dots$$

et l'on écrit que les termes jusqu'à celui en $(s-s_0)^4$ sont nuls :

$$(\vec{r}_0-\vec{R})^2-a^2=0,$$

$$2(\vec{r}_0-\vec{R})\vec{t}=0,$$

$$(\vec{r}_0-\vec{R})\frac{\vec{n}}{\rho}+\vec{t}^2=0,$$

$$\frac{1}{3}(\vec{r}_0-\vec{R})\left(-\frac{\vec{t}}{\rho^2}-\frac{\rho'\vec{n}}{\rho^2}+\frac{\vec{b}}{\rho\tau}\right)=0,\quad\left[\text{car } \frac{\vec{t}\,\vec{n}}{2\rho}=0\right],$$

par conséquent le vecteur $\overrightarrow{P_0S}$ qui va du point P_0 au centre S de la sphère osculatrice et qui vaut $\vec{R}-\vec{r}_0$ a les projections suivantes sur $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$:

$$0,\ \rho,\ \tau\rho',$$

car on déduit des équations précédentes :

$$(\vec{R}-\vec{r}_0)\vec{t}=0$$

$$(\vec{R}-\vec{r}_0)\vec{n}=\rho$$

$$(\vec{R}-\vec{r}_0)\frac{\vec{b}}{\rho\tau}=(\vec{R}-\vec{r}_0)\frac{\vec{n}\rho'}{\rho^2}=\frac{\rho'}{\rho}.$$

Le centre de la sphère osculatrice est donc sur l'axe du cercle osculateur, qu'on appelle la *droite polaire* de la courbe relative au point P_0, à une distance comptée dans le sens de $\vec{b}$, égale en valeur relative à $\tau\frac{d\rho}{ds}$; le rayon de cette sphère est donc :

$$a=\sqrt{\rho^2+\tau^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}.$$

40. Comme exercice qui nous montrera, mieux encore que nous n'avons pu le voir jusqu'ici, le jeu des formules de Frenet, esquissons le calcul de la courbure et de la torsion de la courbe C_1, lieu des centres des sphères osculatrices à la courbe C. Si

$$\vec{r}=\vec{r}(s)$$

[1] On supprime ici, pour alléger l'écriture, l'indice zéro à t, n, ρ, etc...

est l'équation de C, celle de C_1 est

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \rho\vec{n} + \tau\rho'\vec{b},$$

le paramètre de représentation de C_1 est l'arc s de C.

En différentiant, on trouve

$$d\vec{r}_1 = \left[\vec{t} + \rho\frac{d\vec{n}}{ds} + \rho'\vec{n} + \frac{d(\tau\rho')}{ds}\vec{b} + \tau\rho'\frac{d\vec{b}}{ds}\right]ds,$$

d'où, en tenant compte des formules de Frenet et des relations d'orthogonalité de $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$:

$$d\vec{r}_1 = \vec{b}\,ds\left(\frac{\rho}{\tau} + \tau\rho'' + \tau'\rho'\right),$$

mais $d\vec{r}_1$ est parallèle à $\vec{t}_1$; donc on peut prendre

$$\vec{t}_1 = \vec{b},$$

la tangente à C_1 est parallèle à la binormale au point correspondant de C. D'ailleurs

$$d\vec{r}_1 = \vec{t}_1 ds_1$$

s_1 étant l'arc de C_1 compté à partir d'une origine arbitraire ; dès lors

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\rho}{\tau} + \tau\rho'' + \tau'\rho',$$

ce qui fixe le sens des arcs croissants sur C_1.

De
$$\vec{t}_1 = \vec{b},$$
on tire
$$\frac{d\vec{t}_1}{ds_1} = \frac{d\vec{b}}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_1},$$
ce qui s'écrit
$$\frac{\vec{n}_1}{\rho_1} = -\frac{\vec{n}}{\tau}\frac{ds}{ds_1},$$

d'où $\vec{n}_1 = \vec{n}$ ou $-\vec{n}$ suivant le signe de $\tau\dfrac{ds}{ds_1}$ et

$$\rho_1 = \left|\tau\frac{ds_1}{ds}\right| = \left|\rho + \tau\frac{d}{ds}(\rho'\tau)\right|.$$

De plus
$$\vec{b}_1 = \pm\vec{t},$$

et de
$$\frac{d\vec{b}_1}{ds_1} = -\frac{n_1}{\tau_1},$$

on tire

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{1}{\tau_1} \frac{ds_1}{ds} \right|,$$

par conséquent

$$\rho \rho_1 = | \tau \tau_1 |.$$

Surfaces développables.

41. On peut édifier une théorie des enveloppes en utilisant les notations vectorielles, mais si l'on veut conserver une généralité suffisante, il faut entrer dans quelques considérations un peu longues qui nous éloigneraient de l'objet de ce cours ; presque toujours d'ailleurs, ces considérations n'ont pour but que de préciser le langage.

Nous nous bornerons à étudier l'enveloppe d'une famille de plans dépendant d'un paramètre. On peut se donner cette famille de la façon suivante. Soit une courbe Γ; à chaque point $P(s)$ de cette courbe, attachons une direction bien déterminée $\vec{a}$ qui sera donc une fonction de s aussi. Soit alors $\vec{R}$ le vecteur $\overrightarrow{OQ}$ qui joint l'origine O au point courant Q sur un plan choisi de la famille, l'équation de ce plan pourra toujours s'écrire

$$(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{a} = 0 \qquad (1)$$

si $\vec{a}$ a été choisi convenablement, ce qui est toujours possible.

Donnons à s un accroissement Δs, le plan (1) correspondra à s, l'équation

$$(\vec{R} - \vec{r} - \Delta\vec{r})\,(\vec{a} + \Delta\vec{a}) = 0 \qquad (2)$$

définira un autre plan de la famille. En supposant que $\vec{r}$ et $\vec{a}$ sont des fonctions vectorielles analytiques de s, on pourra écrire

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}'\,\Delta s + \frac{\vec{r}''}{2}\,(\Delta s)^2 + \dots$$

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}'\Delta s + \frac{\vec{a}''}{2}\,(\Delta s)^2 + \dots$$

En tenant compte de (1), l'intersection des deux plans de la famille est une droite Δ définie par (1) et par l'équation :

$$(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{a}' - \vec{r}'\,\vec{a} + A\Delta s = 0$$

où A est une fonction de s et de Δs, finie pour $\Delta s = 0$. Lorsque Δs tend vers zéro, la droite Δ a donc une position limite δ définie par les équations :

$$(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{a} = 0, \qquad (1)$$

$$(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{a}' - \vec{r}'\,\vec{a} = 0, \qquad (3)$$

cette droite s'appelle la *caractéristique* du plan (1). On obtient (3) en dérivant les deux membres de (1) relativement à s.

Le plan (3) dépend aussi du paramètre s, à moins que s n'y figure pas, auquel cas δ est fixe et les plans (1) tournent autour d'elle. Nous ne nous occuperons pas de ce cas banal. Le plan (3) a aussi une caractéristique δ' définie par (3) et par l'équation :

$$(\vec{R}-\vec{r})\vec{a}'' - 2\vec{r}'\vec{a}' - \vec{r}''\vec{a} = 0. \qquad (4)$$

Or δ et δ' sont dans le plan (3), elles se coupent ou sont parallèles. Ce dernier cas est banal s'il se présente quel que soit s, car les plans (1) sont parallèles à une direction fixe et ils enveloppent un cylindre.

Les équations (1), (3) et (4) définissent donc en général un point V dépendant de s. S'il est fixe, les droites δ engendrent un cône, cas banal encore.

En général, les droites δ engendrent une surface, dite *surface développable*, dont on va voir une propriété remarquable.

42. *Théorème.* Les droites δ, caractéristiques d'un plan dépendant d'un paramètre, sont tangentes à la courbe lieu du point V.

Cette courbe est *l'arête de rebroussement* ; la surface développable est le lieu de ses tangentes, ou mieux est engendrée par ses tangentes.

Considérons en effet la courbe $\overrightarrow{OV} = \vec{R}$, définie par (1), (3) et (4) ; sa tangente est parallèle à $\vec{R}'$. On va montrer que $\vec{R}'$ est parallèle à δ ; mais δ est dans les deux plans (1) et (2), qui sont deux plans respectivement perpendiculaires à $\vec{a}$ et à $\vec{a}'$; il suffira de montrer que

$$\vec{R}'\vec{a} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{R}'\vec{a}' = 0$$

pour démontrer le théorème.

Or en dérivant les deux membres de (1) par rapport à s :

$$(\vec{R}'-\vec{r}')\vec{a} + (\vec{R}-\vec{r})\vec{a}' = 0,$$

et en tenant compte de (3),

$$\vec{R}'\vec{a} = 0.$$

De même en dérivant les deux membres de (3) et en tenant compte de la valeur de $(\vec{R}-\vec{r})\vec{a}''$ donnée par (4), on trouve :

$$\vec{R}'\vec{a}' = 0$$

Théorème. Le plan tangent en un point à la surface développable est tangent à la surface en tous les points de la génératrice δ qui passe

par ce point. Ce plan tangent est d'ailleurs le plan de la famille dont la caractéristique est δ.

C'est ce théorème qui permet d'affirmer que l'enveloppe de la famille de plans à un paramètre est la surface développable engendrée par les caractéristiques de ces plans.

On démontre ce théorème bien simplement : soit $\vec{R}(s)$ un vecteur dont l'origine est en O et l'extrémité E sur δ, en un point déterminé de cette caractéristique. Lorsque s varie, le point E décrit une courbe sur la développable, $\vec{R}'(s)$ est la direction de sa tangente. Or le vecteur $R(s)$ satisfait aux équations (1) et (3), en dérivant (1) par rapport à s et en tenant compte de (3), on trouve

$$\vec{R}' \cdot \vec{a} = 0$$

et cela quelle que soit la façon (continue cependant) dont on a choisi E sur δ.

Le plan variable contient donc, puisqu'il est perpendiculaire à $\vec{a}$, toutes les tangentes aux courbes tracées sur la développable aux points où ces courbes coupent δ.

Théorème. Les plans tangents de la développable sont aussi les plans osculateurs de l'arête de rebroussement.

En effet, de (1), en tenant compte de (3), on tire par dérivation :

$$\vec{R}'\vec{a} = 0$$

et de même, de (3), en tenant compte de (4) :

$$\vec{R}''\vec{a} = 0.$$

Le plan $\vec{R}'$, $\vec{R}''$ est donc perpendiculaire à $\vec{a}$; comme c'est le plan osculateur de l'arête de rebroussement au point où la caractéristique δ du plan (1) touche cette arête, le théorème est démontré.

Ainsi donc une développable est l'enveloppe d'un plan variable dépendant d'un seul paramètre ; c'est aussi la surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche. On a retrouvé simplement les propriétés de ces intéressants objets.

Développables attachées à une courbe gauche.

43. Les trois plans du trièdre principal attaché à chaque point d'une courbe gauche Γ enveloppent trois développables.

L'enveloppe du plan osculateur est évidemment la développable

dont la courbe Γ est l'arête de rebroussement ; la caractéristique est la tangente $\vec{t}$. On pourrait le retrouver par le calcul.

L'équation du plan normal est

$$(\vec{R}-\vec{r})\vec{t}=0 \qquad (1')$$

son enveloppe sera définie par (1′) et

$$(\vec{R}-\vec{r})\frac{\vec{n}}{\rho}-\vec{t}^{\,2}=0$$

ou

$$(\vec{R}-\vec{r})\frac{\vec{n}}{\rho}=1\,; \qquad (3')$$

la caractéristique δ du plan normal est une droite parallèle à la binormale et passant par le point C tel que $\overrightarrow{PC}=\rho\vec{n}$. Ce point est le centre de courbure de Γ en P ; δ est la *droite polaire* relative à P. La développable cherchée est la *surface polaire* de Γ.

Pour obtenir l'arête de rebroussement, il faut encore ajouter une équation (4′) aux deux équations (1) et (3) obtenue à partir d'elles, comme (4) l'a été à partir de (1) et (3). C'est :

$$(\vec{R}-\vec{r})\frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{n}}{\rho}\right)-\frac{\vec{n}}{\rho}\vec{t}=0,$$

puisque $\vec{t}\,\vec{n}=0$, et que :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{n}}{\rho}\right)=-\frac{\rho'}{\rho^2}\vec{n}+\frac{1}{\rho}\left(-\frac{\vec{t}}{\rho}+\frac{\vec{b}}{\tau}\right).$$

on a, en tenant encore compte de (1′) et (3′) :

$$(\vec{R}-\vec{r})\,\vec{b}=\rho'\tau, \qquad (4')$$

ce qui montre que le point de contact de la droite polaire avec son enveloppe est le centre de la sphère osculatrice relative à $P(s)$, et l'on a cette propriété intéressante : le plan osculateur en un point du lieu des centres des sphères osculatrices à une courbe Γ est normal à Γ.

L'enveloppe du plan rectifiant, c'est-à-dire du plan $\vec{t}$, $\vec{b}$ est le lieu de la droite δ définie par les équations

$$(\vec{R}-\vec{r})\,\vec{n}=0$$

$$(\vec{R}-\vec{r})\left(-\frac{\vec{t}}{\rho}+\frac{\vec{b}}{\tau}\right)=0$$

Cette caractéristique passe donc par $P(s)$ et elle est perpendiculaire à

$$\vec{n} \text{ et à } -\frac{\vec{t}}{\rho}+\frac{\vec{b}}{\tau}\,;$$

elle est donc parallèle à

$$\vec{n} \times \left(-\frac{\vec{t}}{\rho}+\frac{\vec{b}}{\tau}\right)=\frac{\vec{b}}{\rho}+\frac{\vec{t}}{\tau}$$

c'est-à-dire au vecteur de Darboux. Cette développable s'appelle la *surface rectifiante* de Γ. Son arête de rebroussement n'offre guère d'intérêt. Ce qu'il faut remarquer, c'est que Γ est sur sa propre surface rectifiante. Or le plan osculateur en un point de Γ, contenant $\vec{n}$, est perpendiculaire au plan tangent à la surface rectifiante. Mais une courbe tracée sur une surface dont le plan osculateur est normal à la surface en est dite une *ligne géodésique*, dès lors Γ est une ligne géodésique de sa surface rectifiante.

Développées d'une courbe gauche.

44. Le lieu des centres de courbure d'une courbe plane est en même temps l'enveloppe de ses normales ; il n'en est plus ainsi, en général, pour les courbes gauches. On peut se demander comment il faut associer les normales issues des différents points d'une courbe gauche Γ, de manière qu'elles aient une enveloppe, c'est-à-dire de manière qu'elles soient tangentes à une courbe, arête de rebroussement de la développable qu'elles engendrent, et dite alors *développée* de Γ.

Soit $\vec{r}=\vec{r}(s)$ l'équation de Γ, l'équation d'une normale en $P(s)$ sera :

$$\vec{r}_1=\vec{r}+u\vec{n}+v\vec{b}, \tag{1}$$

où u et v sont deux paramètres variables dont le rapport est une fonction de s. Comment déterminer ce rapport de façon que la normale (1) ait une enveloppe ? On considérera u et v comme des fonctions inconnues de s qu'on déterminera de façon que l'équation (1) définisse le point de contact de la normale considérée avec son enveloppe ; soit s_1 l'arc sur cette enveloppe ; on a, en différentiant :

$$\vec{t}_1 ds_1=\left[\left(1-\frac{u}{\rho}\right)\vec{t}+\left(u'-\frac{v}{\tau}\right)\vec{n}+\left(\frac{u}{\tau}+v'\right)\vec{b}\right]ds\,;$$

pour que $\vec{t}_1$ soit précisément la normale choisie, il faut et il suffit que

$$1-\frac{u}{\rho}=0$$

et

$$\frac{u' - \frac{v}{\tau}}{u} = \frac{\frac{u}{\tau} + v'}{v} :$$

ce qui donne d'abord :

$$u = \rho,$$

la normale en question touche donc son enveloppe sur la surface polaire et les développées d'une courbe gauche sont situées sur la surface polaire; ensuite, en résolvant par rapport à $\frac{1}{\tau}$, il vient :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\rho' v - v' \rho}{\rho^2 + v^2} = \frac{d}{ds} \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{v}{\rho}\right);$$

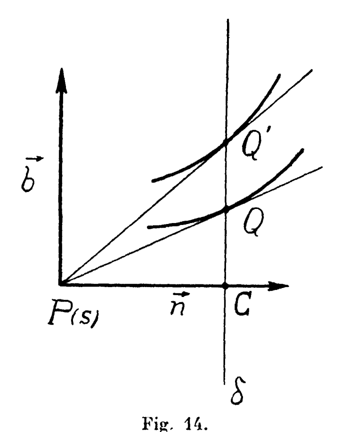


Fig. 14.

posons alors

$$\psi(s) = -\int \frac{ds}{\tau},$$

on aura

$$v = \rho \operatorname{tg}(\psi + \alpha)$$

α étant une constante. La figure montre que $\psi + \alpha$ est l'angle CPQ. Si on choisit une autre constante d'intégration, α' par exemple, on obtient une seconde normale PQ' formant avec la précédente l'angle $\alpha' - \alpha$. Dès lors on a le théorème suivant :

Les développées d'une courbe gauche sont des courbes tracées sur la surface polaire ; si l'on en connaît une, D, on obtiendra toutes les autres en portant sur chaque droite polaire δ, à partir du point Q où

D la coupe, un segment QQ' vu d'un angle constant du point $P(s)$ de Γ correspondant à δ. On obtient d'ailleurs D par une quadrature.

Développantes d'une courbe gauche.

45. Les développantes de Γ sont les courbes Γ_1 dont Γ est une développée. On les définira par l'équation

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + l\vec{t},$$

l étant une longueur, fonction de s, tellement choisie que $d\vec{r}_1$ soit un vecteur perpendiculaire à $\vec{t}$ puisqu'en effet la tangente à Γ doit être normale à la tangente à Γ_1. On aura donc :

$$(\vec{dr} + dl\,\vec{t} + l\,\vec{dt})\vec{t} = 0$$

ce qui s'écrit, d'après les formules de Frenet :

$$ds + dl = 0,$$

ou

$$l = s_0 - s.$$

On engendrera donc les développantes de Γ de la façon suivante. Un fil est tendu le long de Γ, on le déroule en le laissant tendu et en le maintenant tangent à Γ ; son extrémité libre décrit alors une développante. Ces courbes sont situées sur la développable dont Γ est l'arête de rebroussement. On peut dire encore que sur une surface développable, les trajectoires orthogonales des génératrices sont les développantes de l'arête de rebroussement.

Exercices.

1. Montrer que la courbure et la torsion d'une courbe gauche sont données par les formules suivantes si le paramètre de représentation n'est pas l'arc :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\left(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right)^2}{\dot{s}^6}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\left(\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\,\dddot{\vec{r}}\right)}{\left(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right)^2},$$

les points désignant des dérivations par rapport au paramètre.

2. Etudier l'hélice circulaire

$$\vec{r} = a\cos\theta\,\vec{i} + a\sin\theta\,\vec{j} + h\theta\,\vec{k}.$$

3. Etudier les hélices tracées sur un cylindre quelconque ; montrer que le rapport de la courbure à la torsion est constant sur de telles courbes ; démontrer la réciproque.

4. Etudier l'hélice conique

$$\vec{r} = t\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}.$$

5. Sur une courbe gauche, on considère cinq points M, M_1, M_2, M_3, M_4, correspondant aux valeurs de l'arc s, $s + h_1$, $s + h_2$, $s + h_3$, $s + h_4$ respectivement ; les h_i étant des infiniment petits du premier ordre, quel est l'ordre infinitésimal du volume du tétraèdre $M_1\, M_2\, M_3\, M_4$?

6. Montrer que sur une courbe gauche

$$\vec{r}'\,\vec{r}'' = -\frac{1}{\rho^2}$$

$$\vec{r}''\,\vec{r}''' = \frac{1}{\rho}\,\frac{d\,\frac{1}{\rho}}{ds}$$

$$\vec{r}'\,\vec{r}^{\mathrm{IV}} = -\frac{3}{\rho}\,\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds}$$

$$\vec{r}''\,\vec{r}^{\mathrm{IV}} = -\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2\tau^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{d^2\,\frac{1}{\rho}}{ds^2}$$

$$\vec{r}'\,\vec{r}^{\mathrm{V}} = \frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2\tau^2} - 3\left(\frac{d\,\frac{1}{\rho}}{ds}\right)^2 - \frac{4}{\rho}\,\frac{d^2\,\frac{1}{\rho}}{ds^2}.$$

7. A quelles conditions doit satisfaire une courbe gauche pour que ses normales principales soient les normales principales d'une autre courbe gauche. (Courbe de Bertrand.)

8. Trouver la surface polaire des développantes d'une courbe donnée.

9. Les développées d'une courbe plane sont des hélices tracées sur la surface polaire (qui est manifestement un cylindre).

CHAPITRE III

Géométrie infinitésimale (suite). Surfaces.

Les deux formes quadratiques fondamentales.

46. On a déjà vu au § 35 comment on peut représenter une surface. Soit dorénavant

$$\vec{r}(u, v)$$

une fonction $\vec{r}$ de deux paramètres u et v, que nous supposerons analytique[1] pour tous les couples de valeurs (u, v) tels que $a \leqq u \leqq b$, $c \leqq v \leqq d$. A chaque couple (u, v) ne correspond qu'un seul vecteur $\vec{r}$. La surface Σ

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

(ou la portion de surface géométrique que cette équation représente lorsque u et v varient comme il vient d'être dit) est dite *analytique* ; elle est de plus *régulière* si pour tous les couples (u, v), on a

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq 0.$$

Nous n'aurons affaire qu'à des surfaces (ou des portions de surfaces) analytiques et régulières ; nous poserons de plus

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \qquad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

Une courbe C tracée sur Σ est définie par une relation $v = \varphi(u)$ et dès lors son équation vectorielle est

$$\vec{r} = \vec{r}\big(u, \varphi(u)\big).$$

[1] **Dans presque tous les cas, il suffira d'admettre que $\vec{r}$ a des dérivées du 1er et du 2e ordres.**

Il existe des courbes particulièrement intéressantes ; ce sont celles qui sont définies par les équations :

$$u = \text{constante} = u_0$$

et par les équations :

$$v = \text{constante} = v_0.$$

Lorsqu'on donne à u_0 et à v_0 toutes les valeurs possibles, on obtient deux familles de courbes tracées sur Σ. Par chaque point $P_1(u_1, v_1)$ passe en général une courbe de chaque famille, leurs équations sont

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, v) \quad \text{et} \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v_1),$$

sur l'une v varie seul, sur l'autre u varie seul.Les courbes d'une même famille ne se coupent pas en général. Il y a cependant des particularités à signaler; si, par exemple, la courbe $u = u_1$ dégénère en un point, les courbes $v =$ const. passent toutes par ce point. L'exemple de la sphère avec les deux pôles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (θ est la colatitude) par où passent tous les méridiens $\varphi =$ const., est bien clair. En de tels points, l'une des coordonnées est indéterminée, mais ces points sont bien déterminés par la donnée du couple (u_1, v_1); ce ne sont d'ailleurs pas des points réguliers.

Les nombres (u, v) s'appellent les *coordonnées curvilignes* du point P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v)$, et les courbes $u =$ const., $v =$ const. tracent sur Σ un *réseau* de coordonnées.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} u &= \varphi(u', v'), \\ v &= \psi(u', v'), \end{aligned} \qquad (1)$$

φ et ψ étant deux fonctions analytiques de u' et de v' telles que $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u', v')} \neq 0$, l'équation

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

deviendra

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi(u', v'), \psi(u', v')) = \vec{R}(u', v');$$

$\vec{R}$ sera analytique, et cette nouvelle équation représentera encore Σ. On dit que les équations (1) définissent un *changement de coordonnées curvilignes* sur Σ.

47. Considérons une courbe quelconque $v = \varphi(u)$, tracée sur Σ à partir du point $P(u, v)$, le point $P'(u + du, v + dv)$, infiniment voisin de P, sera sur cette courbe si

$$\frac{dv}{du} = \varphi'(u)$$

(on supposera $\varphi(u)$ analytique pour simplifier) ; cela montre que les points P' infiniment voisins de P se distinguent les uns des autres par la valeur du rapport $\frac{dv}{du}$.

Le vecteur $\overrightarrow{PP'}$ est dès lors

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv,$$

où il faut entendre que $dv = \varphi'(u)\, du$. La longueur ds de $\overrightarrow{PP'}$ est donnée par l'équation

$$ds^2 = (\vec{r}'_u du + \vec{r}'_v dv)(\vec{r}'_u du + \vec{r}'_v dv)$$

ou, en posant :

$$E = E(u, v) = \vec{r}_u^{\,2},$$

$$F = F(u, v) = \vec{r}_u \vec{r}_v,$$

$$G = G(u, v) = \vec{r}_v^{\,2},$$

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2;$$

c'est la *première forme quadratique fondamentale* des différentielles du et dv. Elle permet d'établir toutes les relations métriques entre les points et les courbes situés sur Σ. En particulier la longueur de l'arc d'une courbe joignant les deux points $A_0(u_0, v_0)$ et $A_1(u_1, v_1)$ et dont l'*équation* est $v = \varphi(u)$ s'obtient par l'intégrale :

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2F\varphi' + G\varphi'^2}\, du$$

où il est bien entendu que dans les fonctions E, F, G on remplace v par $\varphi(u)$.

L'angle θ des deux directions $\overrightarrow{PP'}$ et $\overrightarrow{PP''}$, où P' a les coordonnées $(u + du,\ v + dv)$ et P'' les coordonnées $(u + \delta u,\ v + \delta v)$ est donné par l'équation

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{PP''}}{|PP'| \cdot |PP''|} = \frac{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v)}{ds \cdot \delta s} =$$

$$= \frac{E\, du\, \delta u + F(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, dv\, \delta v.}{\sqrt{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2} \cdot \sqrt{E\, \delta u^2 + 2F\, \delta u\, \delta v + G\, \delta v^2}}.$$

On trouve l'aire d'une portion $\mathfrak{R}$ de Σ par une intégrale double. La dite portion est formée par les points dont les coordonnées u et v sont assujetties à certaines conditions qu'on exprime le mieux du monde

en disant que dans un plan où l'on a choisi deux axes rectangulaires Ou et Ov, à chaque point $A(u, v)$ d'un certain domaine D, correspond un point de la région $\mathfrak{R}$, et un seul. A chaque rectangle élémentaire de

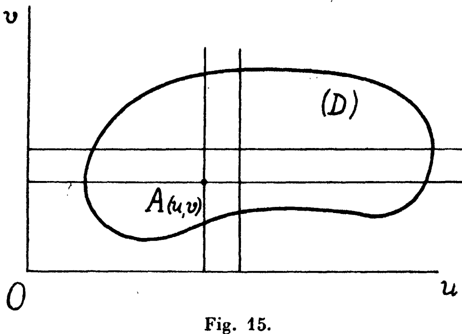


Fig. 15.

D correspond un quadrilatère curviligne de $\mathfrak{R}$ limité par des éléments d'arcs de courbes coordonnées. Ce petit quadrilatère peut être assimilé

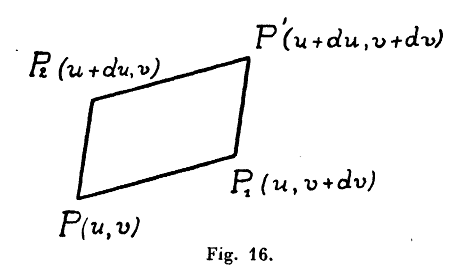


Fig. 16.

à un parallélogramme et l'aire de cet élément de surface est

$$d\sigma = \left|\overrightarrow{PP}_1 \times \overrightarrow{PP}_2\right|$$

ou

$$d\sigma = \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| du\, dv.$$

Or, on a l'identité facile à vérifier :

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 ;$$

donc

$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)^2 = r_u^2 r_v^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = EG - F^2$$

et par suite

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv ;$$

l'aire cherchée est alors

$$\iint_{(D)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

où le domaine d'intégration est le domaine D du plan des u, v.

48. Les vecteurs $\vec{t}$ de toutes les courbes tracées sur Σ et passant par $P(u, v)$ sont dans un plan, le *plan tangent* à Σ en P (§ 35), son équation est

$$(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{N} = 0,$$

où

$$\vec{N} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|r_u \times r_v|} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Considérons $\overrightarrow{dN}$, différentielle de $\vec{N}$ égale à la variation de $\vec{N}$ lorsqu'on passe de $P(u, v)$ au point infiniment voisin $P'(u + du, v + dv)$; on posera

$$\overrightarrow{dN} = \vec{N}_u du + \vec{N}_v dv,$$

$\vec{N}_u$ et $\vec{N}_v$ étant deux vecteurs qu'on n'aura pas besoin de calculer explicitement ; d'ailleurs

$$\vec{N}_u = \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad \vec{N}_v = \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}.$$

La *deuxième forme fondamentale* est la forme quadratique

$$-d\vec{r} \cdot d\vec{N} = -\vec{r}_u \vec{N}_u du^2 - (\vec{r}_u \vec{N}_v + \vec{r}_v \vec{N}_u)\, du\, dv - \vec{r}_v \vec{N}_v dv^2,$$

on l'écrira

$$D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2$$

avec

$$D = -\vec{r}_u \vec{N}_u, \quad D' = -\vec{r}_u \vec{N}_v - \vec{r}_v \vec{N}_u, \quad D'' = -\vec{r}_v \vec{N}_v.$$

Mais puisque $\vec{N}$ est normal à $\overrightarrow{dr}$, on a

$$\vec{r}_u \vec{N} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{r}_v \vec{N} = 0,$$

car $\vec{N}(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = 0$ quels que soient du et dv. On tire de là par dérivation

$$\frac{\partial \vec{r}_u}{\partial u} \vec{N} + \vec{r}_u \vec{N}_u = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{r}_u}{\partial v} \vec{N} + \vec{r}_u \vec{N}_v = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial u} \vec{N} + \vec{r}_v \vec{N}_u = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{r_v}}{\partial v}\vec{N} + \vec{r_v}\vec{N_v} = 0,$$

dès lors :

$$D = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\vec{N}, \qquad D' = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}\vec{N}, \qquad D'' = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\vec{N},$$

ou encore en remplaçant $\vec{N}$ par son expression $\frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{\sqrt{EG - F^2}}$, on obtiendra les formules suivantes avec des produits mixtes

$$D = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\right)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D' = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}\right)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D'' = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\right)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

On en obtiendra les expressions cartésiennes sans difficulté par les déterminants bien connus.

La deuxième forme fondamentale renseigne sur les relations de la surface avec l'espace dans lequel elle est plongée. Plus précisément, la première forme reste invariante dans toute déformation qui n'altère pas les longueurs des courbes tracées sur la surface. La seconde forme reste invariante dans les déplacements de la surface supposée rigide.

Courbure des lignes tracées sur une surface.

49. En un point $P(u, v)$ d'une courbe Γ tracée sur une surface Σ, on peut considérer deux trièdres trirectangles, le trièdre principal $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ qui est propre à la courbe Γ et un trièdre $\vec{t}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, qui permettra d'exprimer les propriétés relatives à la liaison de la courbe avec la surface ; on a $\vec{N}\vec{n} = \cos\theta$, θ étant l'angle de la normale principale de Γ avec la normale à Σ.

On a vu que

$$-d\vec{r} \cdot d\vec{N} = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = d^2\vec{r} \cdot \vec{N},$$

c'est-à-dire puisque $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{\rho}$:

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \qquad (1)$$

Donc :

Théorème. La courbure en un point d'une courbe tracée sur une surface ne dépend que du rapport $\frac{dv}{du}$, caractérisant la direction de la tangente à la courbe dans le plan tangent à la surface, et de l'angle du plan osculateur avec le plan tangent.

En particulier, toutes les courbes tracées sur Σ qui ont même tangente en un point et même plan osculateur en ce point y ont la même courbure, car pour de telles courbes, le second membre de (1) a la même valeur ; l'angle θ est le même pour chacun : ρ étant positif, l'hypothèse de deux angles supplémentaires est à exclure.

Il suffira donc d'étudier les courbes planes — ou plutôt les sections planes de la surface passant par un point P — pour avoir du même coup tous les renseignements concernant la courbure des courbes de Σ qui passent par P.

Considérons maintenant toutes les sections planes passant par la même tangente, $Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$ a un signe déterminé pour ces sections, on pourra prendre le signe $+$ en changeant s'il est nécessaire u en v et v en u, puisque, d'après les formules définissant D, D' et D'', cette permutation change le signe des coefficients de la seconde forme. Pour toutes ces sections $\frac{\cos\theta}{\rho}$ est positif ; pour la section passant par $\vec{N}$, θ est nul (le choix qu'on a fait du signe de D, D', D'' a précisément eu pour but de diriger $\vec{N}$ dans la concavité de cette section normale). Si R est le rayon de courbure de la section passant par $\vec{N}$,

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{1}{R}$$

et dès lors

$$\rho = R\cos\theta.$$

Théorème. Le centre de courbure d'une section S d'une surface Σ est la projection sur le plan de S du centre de courbure de la section normale ayant même tangente.

Ce théorème, dit *théorème de Meusnier*, montre aussi que le lieu des centres de courbure des sections passant par la même tangente est un cercle dont le diamètre est le segment de $\vec{N}$ compris entre le point de contact et le centre de courbure de la section normale.

Il ne reste plus qu'à étudier les courbures des diverses sections normales en un point d'une surface Σ, puisque la courbure de toute section

oblique se ramène, par le théorème de Meusnier, à la courbure d'une section normale. On aura

$$\frac{1}{R} = \frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}, \qquad (2)$$

ce qui permet d'étudier la variation de $\frac{1}{R}$ en fonction de $\frac{dv}{du}$. Il faut remarquer que D, D', D'' ayant été choisis comme on l'a dit pour une section normale particulière, $\frac{1}{R}$ peut être positif ou négatif selon que le numérateur du second membre est positif ou négatif. Cela revient à dire que si deux sections normales ont, d'après (2), deux courbures de signes contraires, leurs normales principales sont de sens opposés.

Dès lors, ayant choisi un sens sur le support de $\vec{N}$, celui de $\vec{N}$ par exemple défini par l'équation

$$\vec{N} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{+\sqrt{EG - F^2}},$$

l'abscisse R, sur cet axe, du centre de courbure C des sections normales en $P(u, v)$ est donné par la formule (2), où il faut considérer $\frac{dv}{du}$ comme un paramètre variable. La discussion de cette relation sera plus facile lorsque nous aurons appris à connaître des systèmes particuliers de coordonnées curvilignes.

Lignes de courbure.

50. Cherchons si l'on peut tracer une courbe Γ sur une surface Σ, telle que les normales à Σ en chacun des points de Γ engendrent une surface développable. Cela revient à chercher sur Σ une courbe Γ dont une développée ait pour tangentes les normales à Γ qui sont normales à Σ, car on sait que sur une surface développable, les trajectoires orthogonales des génératrices sont les développantes de l'arête de rebroussement (§ 45).

Soit

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + l\vec{N}$$

l'équation de la développée, $\vec{r}$ étant le vecteur définissant la courbe Γ,

l est une fonction de P, point courant sur Γ, ce sera donc une fonction de l'arc s sur Γ. Ecrivons que $\overrightarrow{dr_1}$ est parallèle à $\vec{N}$

$$\vec{N} \times (\overrightarrow{dr} + dl\vec{N} + ld\vec{N}) = 0,$$

d'où

$$\vec{N} \times \vec{t}ds + l\vec{N} \times d\vec{N} = 0$$

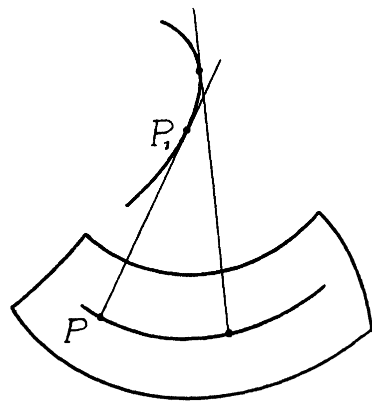


Fig. 17.

$\vec{t}$ étant la tangente à Γ. Cela prouve que

$$\vec{t}ds + ld\vec{N} = 0 \qquad (1)$$

ou que $\vec{t}ds + ld\vec{N}$ est constamment parallèle à $\vec{N}$; cette seconde possibilité est à rejeter puisque, $\vec{t}$ étant perpendiculaire à $\vec{N}$, on ne saurait ajouter à $\vec{t}ds$ un vecteur tel que la résultante soit parallèle à $\vec{N}$.

L'équation (1) permet d'écrire

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = -l\frac{d\vec{N}}{ds},$$

réciproquement, si cette équation est satisfaite, l'équation

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + l\vec{N}$$

définit une courbe dont les tangentes sont normales à Σ.

De (1), on tire

$$\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv = -l\left(\frac{\partial\vec{N}}{\partial u}du + \frac{\partial\vec{N}}{\partial v}dv\right),$$

ce qui donne en multipliant scalairement les deux membres par $\vec{r_u}$ et $\vec{r_v}$ et en tenant compte des formules de définition de D, D', D'' (§ 48) :

$$\begin{aligned} E du + F dv &= l(D du + D' dv) \\ F du + G dv &= l(D' du + D'' dv) \end{aligned} \qquad (1')$$

L'élimination de l, qui est inconnue jusqu'ici, donne l'équation

$$\begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ D du + D' dv & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

qui définit v comme fonction de u, c'est-à-dire qui définit la courbe Γ jouissant de la propriété demandée.

Puisque cette équation différentielle est du second degré en $\frac{dv}{du}$, on voit qu'il existe *deux* courbes passant par chaque point de Σ et telles que les normales à la surface en chacun de leurs points enveloppent une courbe gauche. Ces courbes s'appellent les *lignes de courbure* de la surface Σ.

Il y a cependant un cas particulier où l'équation (2) est satisfaite quels que soient du et dv, alors toutes les courbes de Σ passant par P sont des lignes de courbure, c'est le cas lorsque

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}.$$

Il est facile de voir que ces équations ne sont vérifiées identiquement que lorsque Σ est un plan ou une sphère.

D'autre part, les deux directions définies par (2) sont rectangulaires ; en effet, cette équation s'écrit

$$(ED' - FD)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (FD' + ED'' - GD - FD')\frac{du}{dv} + FD'' - GD' = 0 \quad (2')$$

et la condition d'orthogonalité de deux directions (du, dv), $(\delta u, \delta v)$ est, si l'on pose $u_1 = \frac{du}{dv}$, $u_2 = \frac{\delta u}{\delta v}$ (§ 47),

$$E u_1 u_2 + F(u_1 + u_2) + G = 0;$$

en remplaçant dans cette dernière équation $u_1 u_2$ et $u_1 + u_2$ par les expressions que l'équation du second degré (2′) définit, on trouve qu'elle est vérifiée.

On a dès lors le théorème suivant : Sur chaque surface, il y a deux systèmes de lignes de courbure, chaque courbe d'un système est ortho-

gonale à toutes les courbes de l'autre. Il n'y a d'exception que si la surface est un plan ou une sphère, alors chaque ligne est ligne de courbure.

51. Reprenons l'équation

$$d\vec{r} = - l d\vec{N}$$

qui définit les lignes de courbure ; si l'on y remplace $\frac{du}{dv}$ par l'une et l'autre des valeurs définies par l'équation (2′), on trouvera deux fonctions l_1 et l_2 de u et de v qui sont d'ailleurs racines de l'équation qu'on obtient en éliminant du et dv entre les deux équations (1′) :

$$(DD'' - D'^2) l^2 - (ED'' + GD - 2FD') l + EG - F^2 = 0. \qquad (3)$$

On verra quelles relations ces deux valeurs l_1 et l_2 ont avec la courbure des sections normales.

Retour à la courbure des sections normales.

52. Cette étude est bien simplifiée si, pour les lignes $u =$ const. $v =$ const., nous prenons les lignes de courbure. Puisque les courbes d'une famille sont orthogonales aux courbes de l'autre, on aura dans ce système de coordonnées

$$F = 0.$$

D'autre part, sur l'une des lignes de courbure,

$$d\vec{r} = - l_1 d\vec{N}$$

et sur l'autre

$$d\vec{r} = - l_2 d\vec{N},$$

ce qui s'écrit, puisque v seul varie sur la première, et u sur la seconde :

$$\vec{r}_u = - l_2 \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}$$

$$\vec{r}_v = - l_1 \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}$$

formules dites d'*Olinde Rodrigues* ; par suite

$$D = - \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \cdot \vec{r}_u = \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u}{l_2} = \frac{E}{l_2}$$

$$D' = - \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} \cdot \vec{r}_u = - \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \cdot \vec{r}_v = 0$$

$$D'' = - \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} \cdot \vec{r}_v = \frac{\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v}{l_1} = \frac{G}{l_1}.$$

La courbure d'une section normale dont $\frac{du}{dv}$ caractérise la direction est alors (éq. (2), § 49) :

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{E}{l_2} du^2 + \frac{G}{l_1} dv^2}{Edu^2 + Gdv^2} = \frac{E}{l_2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{G}{l_1}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2;$$

si φ est l'angle que la section considérée fait avec la courbe $u =$ const., on aura :

$$\cos\varphi = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}, \qquad \sin\varphi = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}$$

et, par suite :

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{l_2} + \frac{\sin^2\varphi}{l_1}, \tag{1}$$

ce qui montre que si l_1 et l_2 sont de même signe, R est compris entre l_1 et l_2 et que si l_1 et l_2 sont de signes contraires, par exemple : $l_1 < 0$, $l_2 > 0$, R est compris entre $-\infty$ et l_1 ou entre l_2 et $+\infty$, l_1 et l_2 étant d'ailleurs les rayons de courbure des sections normales tangentes aux lignes de courbure $\left(\varphi = 0 \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

La formule précédente (1) résoud complètement le problème que nous nous sommes posé ; elle est due à Euler. On peut en donner une interprétation géométrique simple, au moyen de l'*indicatrice de Dupin.* On porte dans le plan tangent à la surface au point $P(u, v)$ considéré, sur chaque demi-droite issue de P, un vecteur dont la longueur est $\sqrt{R}$ si l_1 et l_2 sont positifs ; si l_1 et l_2 sont négatifs, un changement dans le sens de $\vec{N}$ ramènera au cas où l_1 et l_2 sont positifs. L'extrémité de ce vecteur décrit une courbe dont l'équation, rapportée aux axes rectangulaires $O\xi$ et $O\eta$ tangents aux lignes de courbure passant par P, est

$$\frac{\xi^2}{l_1} + \frac{\eta^2}{l_2} = 1,$$

car $\xi = \sqrt{R}\cos\varphi$ et $\eta = \sqrt{R}\sin\varphi$. C'est une ellipse. Si l_1 et l_2 sont de signes contraires, par exemple : $l_1 > 0$ et $l_2 < 0$, on portera la longueur $\sqrt{|R|}$ sur chaque vecteur et le lieu sera formé des deux courbes

$$\frac{\xi^2}{l_1} - \frac{\eta^2}{-l_2} = 1,$$

$$-\frac{\xi^2}{l_1} + \frac{\eta^2}{-l_2} = 1$$

ce sont deux hyperboles conjuguées. On lira sur ces courbes, dites *indicatrices*, que le rayon de courbure d'une section normale est égal au carré du rayon vecteur qui va de P au point où la dite section coupe l'indicatrice, ce carré devra être pris avec le signe $+$ pour l'ellipse, le signe $+$ pour l'une des hyperboles et le signe $-$ pour l'autre. Dès lors, si l'indicatrice en un point est une ellipse, la surface est d'un seul côté du plan tangent dans le voisinage du point de contact ; si l'indicatrice est une hyperbole, la surface est à courbures opposées en ce point, elle est coupée par le plan tangent selon deux courbes tangentes aux asymptotes communes des deux hyperboles ; les sections normales tangentes aux asymptotes de l'indicatrice sont à courbure nulle ($R = \infty$).

Il y a deux cas particuliers à considérer :

1. Celui où $l_1 = l_2$; l'indicatrice est un cercle ; toutes les sections normales ont la même courbure, le point considéré $P(u, v)$ est dit un *ombilic* de la surface. L'équation (3) du § 51 a deux racines égales et l'équation (2) du même paragraphe est indéterminée. Cette dernière condition s'écrit

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}$$

ce qui entraîne la première.

2. Celui où l'une des valeurs de l définies par [(3) § 51] est infinie ; on a dès lors

$$DD'' - D'^2 = 0.$$

En refaisant le calcul spécialement pour de tels points, on trouve que l'indicatrice est formée de deux droites parallèles.

53. Il y a donc sur la surface Σ considérée :

α) des *points elliptiques*, en lesquels la surface a ses *deux rayons de courbure principaux* l_1 et l_2 de même signe, la *courbure totale*

$$C = \frac{1}{l_1 l_2} = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}$$

y est positive, donc $DD'' - D'^2 > 0$ en ces points ; les ombilics sont des points elliptiques particuliers d'où partent une infinité de lignes de courbure ; ce sont en quelque sorte des points singuliers pour la représentation au moyen des paramètres u et v des lignes de courbure ; ils sont caractérisés par les conditions :

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}.$$

β) des *points hyperboliques* où l_1 et l_2 sont de signes contraires ; la courbure totale y est négative ; $DD'' - D'^2 < 0$ en ces points.

γ) des *points paraboliques* caractérisés par la condition :

$$DD'' - D'^2 = 0 ;$$

en ces points la courbure totale est nulle. Une surface développable n'a que des points paraboliques ; la réciproque est vraie aussi. Le lecteur le démontrera aisément.

Lignes asymptotiques.

54. On appelle *lignes asymptotiques* d'une surface Σ les courbes tracées sur Σ, en chaque point desquelles le plan osculateur est précisément le plan tangent à la surface. Pour de telles courbes, $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\vec{N}$, $\cos\theta = 0$, donc [éq. (1) § 49]

$$Ddu^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2 = 0. \qquad (1)$$

Les lignes asymptotiques sont définies par cette équation différentielle du premier ordre et du second degré. Il faut distinguer trois cas :

1. $DD'' - D'^2 > 0$, il n'y a pas de valeurs réelles du rapport $\frac{du}{dv}$ qui satisfassent à l'équation (1) ; donc, en des points elliptiques, il ne passe pas de lignes asymptotiques.

2. $DD'' - D'^2 < 0$; il y a deux valeurs réelles de $\frac{du}{dv}$ qui satisfont à l'équation (1) ; il y a donc deux lignes asymptotiques passant par chaque point hyperbolique de Σ.

3. $DD'' - D'^2 = 0$; l'équation (1) a une racine double en $\frac{du}{dv}$. En chaque point parabolique, il ne passe qu'une ligne asymptotique, ou peut-être deux lignes asymptotiques tangentes.

Remarquons que si une droite est sur Σ, elle est une asymptotique de Σ, car son plan osculateur étant indéterminé, il peut être pris tangent à la surface. Sur les quadriques réglées, il y a deux familles de droites, ce sont les deux familles d'asymptotiques. Sur une développable, il n'y a qu'une famille d'asymptotiques, les génératrices rectilignes, qu'on peut compter doublement.

On peut démontrer encore le théorème suivant :

Les lignes asymptotiques sont tangentes aux asymptotes de l'indicatrice relative à chacun de leurs points ; c'est ce qui justifie leur nom.

En effet, les sections normales passant par les tangentes de l'indicatrice en P, ont une courbure nulle en P ; $\frac{1}{R} = 0$, donc [éq. (2) § 49] pour ces sections :

$$D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2 = 0,$$

le théorème est démontré.

Lignes géodésiques.

55. Les *lignes géodésiques* d'une surface sont des lignes en chaque point desquelles le plan osculateur est normal à la surface, c'est-à-dire qu'en chacun de leurs points,

$$\vec{n} = \vec{N}.$$

On peut chercher à définir une telle courbe par des équations paramétriques

$$u = u(s) \qquad v = v(s).$$

On formera $\vec{t}$ puis $\frac{\vec{n}}{\rho} = \frac{d\vec{t}}{ds}$ et l'on écrira que $\vec{n}$ est perpendiculaire aux deux vecteurs $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

Or
$$\vec{t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{ds} ;$$

on posera
$$u' = \frac{du}{ds} \quad \text{et} \quad v' = \frac{dv}{ds} ; \quad \text{dès lors}$$

$$\frac{\vec{n}}{\rho} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} u'^2 + 2\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} u'v' + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} u'' + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} v'' ;$$

les conditions

$$\frac{\vec{n}}{\rho}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\vec{n}}{\rho}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0$$

s'écriront, si ρ n'est pas infini [auquel cas la courbe considérée serait une droite et, en effet, si la surface est réglée, chaque droite qu'elle contient est une géodésique] :

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} u'^2 + 2\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} u'v' + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} v'^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 u'' + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} v'' = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} u'^2 + 2\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} u'v' + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} v'^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} u'' + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 v'' = 0 ;$$

en rappelant que

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2,$$

les équations précédentes s'écrivent :

$$Eu'' + Fv'' + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 + \frac{\partial E}{\partial v}u'v' + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)v'^2 = 0$$

$$Fu'' + Gv'' + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)u'^2 + \frac{\partial G}{\partial u}u'v' + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}v'^2 = 0.$$

Ce système, sous des conditions très larges, admet une solution,

$$u = u(s), \qquad v = v(s),$$

prenant, pour $s = 0$, des valeurs u_0 et v_0, les dérivées $\frac{du}{ds}$ et $\frac{dv}{ds}$ prenant en u_0, v_0 des valeurs u'_0 et v'_0 arbitraires aussi. Il y a donc, en général, une géodésique passant par un point de Σ et ayant en ce point une tangente donnée [déterminée par le rapport des données $\frac{du}{ds}$ et $\frac{dv}{ds}$ en (u_0, v_0)].

En appliquant les règles du calcul des variations à l'intégrale

$$I = \int_P^Q ds$$

étendue à une courbe C joignant P à Q sur la surface Σ, on démontre sans difficulté que $\delta I = 0$ pour les géodésiques joignant P à Q. En général, si Q est assez voisin de P, il n'y a qu'une extrémale, c'est-à-dire qu'une courbe joignant P à Q, sur Σ, et rendant I stationnaire.

Le calcul des variations montre que la ligne la plus courte sur Σ qui joigne le point P à un point Q suffisamment voisin est toujours une ligne géodésique.

Nous arrêtons ici nos développements géométriques ; ils suffisent pour montrer la précision de l'appareil vectoriel ; le lecteur qui désire en connaître davantage pourra se reporter à l'excellent traité de M. C. E. Wheatherburn : *Differential Geometry of three Dimensions*, 2 vol., Cambridge, University Press.

Exercices.

1. On a vu que les lignes de courbure d'une surface sont les lieux des points en lesquels les normales à la surface engendrent une développable ; on fera voir que les normales touchent alors leurs enveloppes en deux points C_1 et C_2 tels que $\overline{PC_1}$ et $\overline{PC_2}$ soient égaux aux rayons de courbure principaux.

2. Montrer que le second système de lignes asymptotiques d'une surface réglée est défini par une équation de Riccati.

3. La relation

$$D du\delta u + D'(du\delta v + dv\delta u) + D'' dv\delta v = 0$$

exprime que les deux directions (du, dv) $(\delta u, \delta v)$ issues du point $P(u, v)$ d'une surface sont *conjuguées* par rapport à l'indicatrice de Dupin du point P.

4. Soit une courbe C tracée sur une surface Σ ; les plans tangents à Σ le long de C enveloppent une développable; montrer que la caractéristique d'un de ces plans est *conjuguée* à la tangente à C au point de contact du plan considéré.

5. Le carré de la torsion d'une ligne asymptotique est égal à l'inverse du produit changé de signe des deux rayons de courbure principaux (*théorème d'Enneper*).

6. On se donne une surface réglée par l'équation

$$\vec{r} = \vec{R} + \lambda \vec{a}, \tag{1}$$

$\vec{R}$ étant un vecteur variable définissant une courbe gauche, $\vec{a}$ un vecteur unité dont la direction variable est fonction du seul paramètre t dont dépend $\vec{R}$; λ est un nombre variant de $-\infty$ à $+\infty$ indépendamment de t. Pour que (1) représente une développable, il faut et il suffit que

$$\left(\vec{a}\, \frac{d\vec{a}}{dt}\, \frac{d\vec{R}}{dt}\right) = 0 ;$$

lorsque cette relation n'est pas satisfaite, la surface réglée est dite *gauche*. Le plan tangent à la surface réglée gauche (1) tourne autour de la génératrice rectiligne lorsque le point de contact la décrit ; si ce point de contact s'éloigne à l'infini, le plan tangent a une position limite π ; on appelle *point central* d'une génératrice, le point en lequel le plan

tangent à la surface est perpendiculaire à π. Le lieu des points centraux est la *ligne de striction* de la surface réglée gauche. Si ρ est la mesure algébrique de la distance d'un point P au point central de la génératrice qui passe par P, montrer que l'angle θ que fait le plan tangent en P avec le plan tangent au point central est donné par la formule

$$\operatorname{tg}\theta = k\rho,$$

k étant un nombre variable avec la génératrice, dit *paramètre de distribution.* On voit immédiatement que le rapport anharmonique de quatre plans tangents à une surface réglée gauche en quatre points situés sur une même génératrice est égal au rapport anharmonique des quatre points de contact.

7. Etudier les surfaces réglées engendrées par les normales principales et par les binormales d'une courbe gauche.

8. L'équation différentielle des lignes de courbure d'une surface quelconque peut s'écrire

$$d(\vec{r} \times \vec{N}) \cdot d\vec{N} = 0.$$

9. On considère la développable dont la courbe gauche $\vec{r} = \vec{r}(s)$ est l'arête de rebroussement, soit

$$\vec{R} = \vec{r}(s) + v\vec{t},$$

on prend s et v comme paramètres sur cette surface. Calculer les deux formes quadratiques de cette surface et montrer que ses lignes de courbures sont définies par les équations

$$s = \text{const.} \qquad s + v = \text{const.}$$

CHAPITRE IV

Théorie des champs. Opérateurs différentiels.

Champ scalaire.

56. Dans l'espace euclidien ou dans une portion de cet espace, imaginons que nous considérions une grandeur scalaire variable attachée à chaque point P ; plus précisément, supposons une correspondance entre chaque point P de la dite région R et un nombre réel variable f ; à tout point P de R correspond *un* nombre f. Ce nombre est *une fonction de* P, qu'on représentera par le symbole $f(P)$. Il n'y a dans cette notion rien de plus ni rien de moins que dans la notion de fonction $F(x, y, z)$ des trois coordonnées x, y, z qui caractérisent la position de P, dans un système d'axes rectangulaires, par exemple.

On dira que la fonction $f(P)$ définit un *champ scalaire.*

Ce champ est *continu en* P si, étant donné un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut lui faire correspondre un nombre η tel que pour tous les points P' situés dans la sphère de rayon η centrée en P, on ait

$$|f(P') - f(P)| < \varepsilon.$$

Le champ sera continu dans la région R s'il l'est en chaque p int de R. On ne s'occupera, dans la suite, à moins de faire mention expresse du contraire, que de champs continus.

57. Soit P_0 un point en lequel le champ vaut f_0. Les points P pour lesquels

$$f(P) = f_0$$

sont donc des points de l'espace soumis à *une* condition ; ils dépendent

donc de deux paramètres, leur lieu est *une surface* Σ_0 qui peut d'ailleurs être formée de plusieurs nappes. Les surfaces définies par la condition

$$f(P) = \text{const.}$$

sont dites *surfaces de niveau* du champ scalaire considéré. Par chaque point de R, il en passe une et une seule.

Nous supposerons que $f(P)$ est une fonction telle que les surfaces de niveau aient un plan tangent en chacun de leurs points et que ce plan tangent varie continuement lorsque son point de contact se déplace sur la même surface de niveau ou qu'il passe d'une surface à l'autre ; on verra bientôt dans quelles conditions ces faits se produisent.

Champs vectoriels.

58. A chaque point P d'une région R, on fait correspondre une grandeur vectorielle $\vec{v}$. Ce vecteur est une *fonction* de P, on la représentera par le symbole $\vec{v}(P)$. La fonction $\vec{v}(P)$ définit un *champ vectoriel.*

La continuité en P d'une telle fonction, — ou d'un tel champ — se définit bien aisément : à tout ε, correspond un η tel que

$$\left|\vec{v}(P') - v(P)\right| < \varepsilon$$

si $\left|\overrightarrow{PP'}\right| < \eta$.

La continuité dans une région R est assurée s'il y a continuité en chaque point de R. Sauf mention expresse, les champs que nous considérerons seront continus dans les régions où ils sont définis.

Cartésiennement, on définira $\vec{v}(P)$ au moyen de vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ issus d'un point fixe O [cf. § 15], P ayant dans ce système les coordonnées x, y, z :

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(x, y, z) = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\,\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}\,;$$

X, Y et Z sont les composantes variables de $\vec{v}$.

Première définition du gradient.

59. Revenons au champ scalaire $f(P)$. Nous allons définir, en correspondance avec ce champ, un champ vectoriel par un procédé un peu indirect.

Par le point P, faisons passer une droite δ sur laquelle on choisit un vecteur unité $\vec{s}$ qui fixe un sens positif et fait de δ un axe. Soit

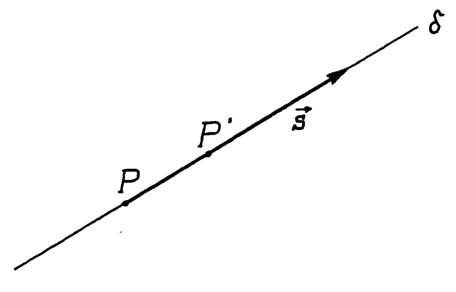


Fig. 18.

P' un point voisin de P :

$$\overrightarrow{PP'} = \Delta l \cdot \vec{s}.$$

Formons le rapport

$$\frac{f(P') - f(P)}{\Delta l}$$

et faisons tendre P' vers P, c'est-à-dire Δl vers zéro. Si le rapport précédent a une limite finie et bien déterminée, quelle que soit la manière dont Δl tend vers zéro — que ce soit par valeurs positives ou par valeurs négatives, par valeurs rationnelles ou par valeurs irrationnelles, etc., — on dit que le champ f admet en P une *dérivée dans la direction* $\vec{s}$, qui est précisément la dite limite. On la représente par le symbole

$$\frac{df}{ds}$$

et l'on a :

$$\frac{df}{ds} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(P') - f(P)}{\Delta l} \text{ avec } \overrightarrow{PP'} = \Delta l \cdot \vec{s}.$$

En toute rigueur, on devrait parler de la dérivée suivant l'axe $\vec{s}$ parce que si l'on change $\vec{s}$ en $-\vec{s}$ la direction ne change pas, mais $\frac{df}{ds}$ change de signe. Nous conserverons cependant cette manière de parler.

Nous ferons l'hypothèse suivante : en chaque point P de R, le champ f admet une dérivée dans toutes les directions $\vec{s}$.

On pourra dès lors appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction d'une seule variable l définie par la relation

$$F(l) = f(P'),$$

où $\overrightarrow{PP'} = l\vec{s}$. D'abord :

$$F'(l) = \frac{df}{ds},$$

et ensuite

$$F(l') = F(l) + (l'-l)\, F'[l + \theta(l'-l)] \qquad 0 < \theta < 1.$$

Donc

$$f(P') = f(P) + \overline{PP'} \left(\frac{df}{ds}\right)_{P_1}$$

où $\overline{PP'}$ est la mesure de $\overrightarrow{PP'}$ sur l'axe $\vec{s}$, et où P_1 est un point compris entre P et P' sur la droite PP', en lequel on doit calculer $\frac{df}{ds}$.

59. Une direction intéressante à considérer en chaque point P, c'est la direction $\vec{n}$ issue de P, normale à la surface de niveau Σ passant par P et dont le sens est celui qui va vers les surfaces de niveau correspondant à des valeurs de f supérieures à la valeur $f(P)$. On dit que $\vec{n}$ est dirigé vers les f croissants. On calcule $\frac{df}{dn}$ en P ; c'est un nombre

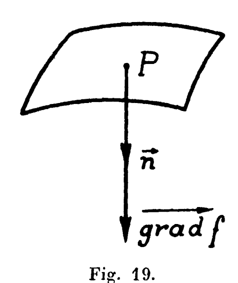


Fig. 19.

positif ; on porte à partir de P dans le sens de n un vecteur de longueur $\frac{df}{dn}$. C'est ce vecteur qu'on appelle le *gradient* du champ scalaire f au point P. Ce gradient définit un champ vectoriel $\vec{v}(P)$ qu'on représente par le symbole $\overrightarrow{\text{grad}}\ f$.

Lorsqu'on connaît le gradient de f, on peut calculer la dérivée de f dans toute direction $\vec{s}$. En effet, soit $\overrightarrow{PP'} = \lambda\vec{n}$, $\overrightarrow{PP''} = l\vec{s}$, et suppo-

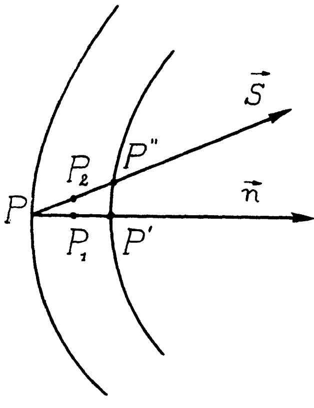


Fig. 20.

sons de plus que P' et P'' soient sur une même surface de niveau :

$$f(P') = f(P'').$$

En appliquant le théorème des accroissements finis, on a :

$$f(P') = f(P) + \overline{PP'}\left(\frac{df}{dn}\right)_{P_1}$$

$$f(P'') = f(P) + \overline{PP''}\left(\frac{df}{ds}\right)_{P_2},$$

d'où

$$\overline{PP'}\left(\frac{df}{dn}\right)_{P_1} = \overline{PP''}\left(\frac{df}{ds}\right)_{P_2},$$

mais si φ est l'angle de $\vec{n}$ et de $\vec{s}$ et si les plans tangents aux surfaces de niveau varient continuement comme nous l'avons dit plus haut, $\overline{PP'}$ est égal à $\overline{PP''}\cos\varphi$ à une quantité ε près, telle que $\left|\frac{\varepsilon}{\overline{PP'}}\right|$ tende vers zéro lorsque P' tend vers P; autrement dit, si $\overline{PP'}$ est infiniment petit du premier ordre, il ne diffère de $\overline{PP''}\cos\varphi$ que d'un infiniment petit d'ordre supérieur.

Dès lors P_1 et P_2 arrivent à la limite en P, et l'on a au point P,

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dn} \cos \varphi,$$

mais

$$\overrightarrow{\text{grad}}\; f = \frac{df}{dn} \vec{n}$$

car, bien entendu, $\vec{n}$ est un vecteur unité ; de plus

$$\vec{s}\; \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{df}{dn} \vec{n} \cdot \vec{s} = \frac{df}{dn} \cos \varphi$$

donc :

$$\frac{df}{ds} = \vec{s}\; \overrightarrow{\text{grad}}\; f,$$

ce qui montre que l'opérateur $\frac{d}{ds}$ est représenté par le produit scalaire symbolique $\vec{s}\; \overrightarrow{\text{grad}}$, $\overrightarrow{\text{grad}}$ étant un opérateur qui, appliqué à un scalaire, donne un vecteur; on peut le considérer comme un vecteur symbolique. On verra ces faits d'une façon beaucoup plus claire un peu plus loin. Il convenait d'introduire le gradient de cette manière tout d'abord, parce que c'est comme cela qu'on est accoutumé de le définir dans les cours de mécanique et de physique.

Désignons par df la différentielle de f, c'est-à-dire la partie principale de la variation infiniment petite de f, lorsqu'on passe du point P au point infiniment voisin P', tel que $\overrightarrow{PP'} = \vec{dr}$; on aura

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}\; f \cdot \vec{dr}$$

car

$$\vec{dr} = \vec{s}\; ds.$$

En coordonnées cartésiennes, on aurait

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

où l'on emploie le même symbole f pour représenter le champ en coordonnées $f(x, y, z)$. Dès lors, puisque dans cette hypothèse

$$\vec{dr} = dx\, \vec{i} + dy\, \vec{j} + dz\, \vec{k},$$

le gradient est le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\; f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k},$$

qu'on peut représenter par la notation

$$\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)f,$$

l'opérateur entre parenthèses est un vecteur symbolique, dont la définition par le moyen des axes n'est naturellement pas satisfaisante ; on en donnera plus loin une définition intrinsèque.

Représentation vectorielle des éléments de surface.

60. Pour étudier les propriétés différentielles des surfaces, il nous a suffi de considérer de petits morceaux de surface, et les lignes que nous avons appris à tracer sur les surfaces se définissant de proche en proche par des équations différentielles, on pouvait imaginer que ces morceaux se raccordaient et formaient des bandes, lesquelles bandes accolées constituaient la surface dans son ensemble.

Les propriétés de la surface dans son ensemble ressortissent à des principes très différents de ceux auxquels nous sommes accoutumés jusqu'ici, leur étude est l'objet de la *topologie.* Une notion importante de cette science a trait aux faces d'un élément de surface ; un tel élément, en effet, a deux côtés comme cette feuille de papier, mais est-on sûr qu'en raccordant ces éléments les uns aux autres, on obtienne une surface sur laquelle il soit possible de distinguer encore deux côtés ? L'exemple du ruban de Möbius prouve que cette certitude ne serait pas fondée. Qu'on prenne une bande de papier assez allongée, un ruban, et qu'on en colle les deux extrémités l'une à l'autre après l'avoir tordu une fois. On peut tracer un chemin sur cette surface partant d'un point P et aboutissant au point qui est derrière P sur le ruban, sans avoir à passer par les bords. Le ruban de Möbius est une surface qui n'a qu'un seul côté ; elle est *unilatère.*

Nous supposerons n'avoir affaire qu'à des surfaces *bilatères.* Un chemin qui part de P ne peut aboutir au point qui est derrière que s'il franchit un bord. Si la surface bilatère ne s'étend pas à l'infini et si elle n'a pas de bord, elle est dite *fermée.* Une surface fermée divise l'espace en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure.

Sur une surface bilatère, on distinguera un côté de l'autre en disant que l'un d'eux est positif, l'autre étant négatif. Cela permettra de définir un sens sur la normale en un point d'une telle surface : on prendra le sens suivant lequel il faut percer la surface pour passer de la face négative à la face positive. Lorsque la surface est fermée, on choisira tou-

jours le côté positif vers l'extérieur du volume limité par la surface, la normale $\vec{n}$ sera donc extérieure au volume limité par la surface.

61. Soit, dès lors, autour d'un point P un élément de surface — nous ne dirons plus bilatère puisqu'il est entendu que nous nous bornons à cette classe — ; représentons par $d\sigma$ son aire infiniment petite. Un vecteur lié à P, porté par le support de $\vec{n}$ et de même sens, dont la longueur est $d\sigma$ représentera l'élément de surface et cette représentation

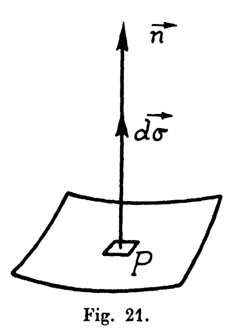


Fig. 21.

sera suffisamment précise et utile pour de nombreuses questions. On le notera $\vec{d\sigma}$ et l'on a bien évidemment

$$\vec{d\sigma} = \vec{n}\, d\sigma.$$

Intégrales curvilignes et intégrales de surface.

62. Soit C une courbe dont l'équation est

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t),$$

t étant un paramètre de représentation de C qui peut être l'arc s. On est amené tout naturellement à considérer des intégrales

$$\int_C f(P)\, d\vec{r} \quad \text{ou} \quad \int_C \vec{\varphi}(P) \cdot d\vec{r} \quad \text{ou} \quad \int_C \vec{\varphi}(P) \times d\vec{r},$$

ce sont des limites de sommes : la première et la troisième sont des sommes de vecteurs, la deuxième, une somme de scalaires. Les significations en sont bien claires. On verrait sans peine, en particulier, que si C est rectifiable et de longueur finie, ces intégrales ont un sens, lorsque de plus $f(P)$ et $\vec{\varphi}(P)$ sont continues sur C et que leurs valeurs absolues $|\vec{f}(P)|$ et $|\vec{\varphi}(P)|$ y sont bornées.

On peut aussi considérer des intégrales de surfaces

$$\iint_{\Sigma} f(P)\,\vec{d\sigma} \quad \text{ou} \quad \iint_{\Sigma} \vec{v}(P)\vec{d\sigma} \quad \text{ou} \quad \iint_{\Sigma} \vec{v}(P) \times \vec{d\sigma}\,;$$

nous avons déjà défini l'aire de Σ comme l'intégrale $\iint_{\Sigma} d\sigma$ qui s'écrirait avec nos notations

$$\iint_{\Sigma} \vec{n}\,\vec{d\sigma}.$$

Pour être précis et clair, nous allons définir l'intégrale

$$\vec{I} = \iint_{\Sigma} \vec{v} \times \vec{d\sigma}.$$

On divise la surface en N parties par un réseau de courbes. Soit la i[ième] et désignons par P_i un point quelconque sur cette portion, soient aussi $\vec{v}(P_i)$ le vecteur du champ en P_i, et $\vec{n_i}$ la normale à Σ en P_i ; appelons $\Delta\sigma_i$ le nombre qui mesure l'aire de la dite portion et considérons le vecteur $\overrightarrow{\Delta\sigma_i}$ porté par $\vec{n_i}$ et de longueur égale à $\Delta\sigma_i$. On formera la somme

$$\vec{S_N} = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{v}(P_i) \times \overrightarrow{\Delta\sigma_i}\,;$$

si cette somme, qui est un vecteur, a une limite lorsque N augmente indéfiniment et que les éléments $\Delta\sigma_i$ tendent tous vers zéro dans chacune de leurs dimensions, c'est cette limite qu'on représente par

$$\iint_{\Sigma} \vec{v} \times \vec{d\sigma}.$$

Pour calculer effectivement les intégrales

$$\int_{C} f\,d\vec{r}, \quad \int_{C} \vec{v} \times d\vec{r}$$

$$\iint_{\Sigma} f\,\vec{d\sigma}, \quad \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{d\sigma}$$

il est commode de procéder ainsi : on prend un vecteur unité $\vec{a}$ quelconque, mais constant, et on calcule les *nombres*

$$\int_{C} f\,\vec{a} \cdot \vec{dr}, \quad \int_{C} \vec{a} \cdot \vec{v} \times d\vec{r}$$

$$\iint_{\Sigma} f\,\vec{a} \cdot \vec{d\sigma}, \quad \iint_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{v} \times \vec{d\sigma}$$

qui sont des intégrales du type

$$\int_{s=0}^{s=l} F(s)\,ds \quad \text{ou} \quad \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(t)\,dt,$$

ou

$$\iint_{(D)} F(u, v)\,du\,dv,$$

(D) étant un certain domaine du plan des u, v (*cf.* § 47). On calcule donc le nombre $\vec{a}\vec{I}$. On procède de cette façon avec deux autres vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ et l'on doit résoudre les 3 équations

$$\vec{a}\vec{I} = A$$

$$\vec{b}\vec{I} = B$$

$$\vec{c}\vec{I} = C.$$

Il n'est pas difficile (*cf.* exercice 12, ch. I) de voir que

$$\vec{I} = \frac{A(\vec{b} \times \vec{c}) + B(\vec{c} \times \vec{a}) + C(\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})}$$

pourvu que $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ forment un véritable trièdre. Si $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$, le calcul précédent revient au calcul des composantes de $\vec{I}$ par le moyen des composantes de l'élément différentiel qui figure sous $\int_C$ ou sous $\iint_\Sigma$.

Il est bien entendu que chaque fois que les applications font intervenir de telles intégrales, il sera nécessaire de démontrer qu'elles ont un sens avant de les utiliser. Si la surface Σ est quarrable, c'est-à-dire si l'intégrale $\iint d\sigma$ a un sens, et si $f(P)$ et $\vec{v}(P)$ sont continues sur Σ, si de plus leurs valeurs absolues $|f(P)|$ et $|\vec{v}(P)|$ y sont bornées, les intégrales précédentes ont un sens.

On peut conserver la condition pour $|f|$ et $|\vec{v}|$ d'être bornées et laisser tomber celle de continuité tant pour les intégrales curvilignes que pour les intégrales de surface, pourvu que les points de discontinuité puissent être enfermés, dans le premier cas, dans un nombre fini d'arcs dont la somme soit aussi petite que l'on veut, et, dans le second cas, dans un nombre fini de portions de Σ dont l'aire totale soit aussi petite que l'on veut. On démontre ces propositions comme on démontre en ana-

lyse les propositions relatives aux intégrales curvilignes $\int_C f(s)ds$ ou $\iint_\Sigma F(u, v)\, du\, dv$. Il est inutile d'y insister davantage ici.

63. *Théorème.* Si la surface Σ est fermée et si elle est formée d'un nombre fini de portions régulières, c'est-à-dire de portions en chaque point desquelles le plan tangent est bien déterminé et le vecteur $\vec{n}$ continu, l'intégrale $\iint_\Sigma \vec{d\sigma}$ est nulle.

Supposons tout d'abord qu'une droite quelconque ne rencontre pas la surface en plus de deux points, calculons alors $\iint_\Sigma \vec{a}\, \vec{d\sigma} = \vec{a} \iint_\Sigma \vec{d\sigma}$, $\vec{a}$ étant un vecteur de longueur unité.

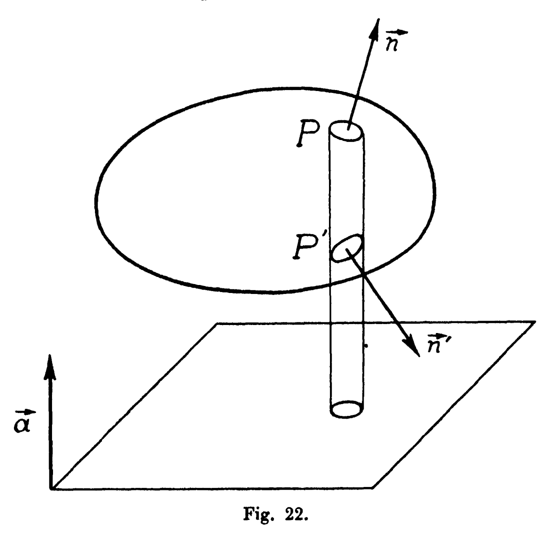


Fig. 22.

A tout point P de Σ, on peut en faire correspondre un et un seul autre P' de Σ situé sur la parallèle à $\vec{a}$. Le nombre $\vec{a}\, \vec{d\sigma}$ relatif à l'élément $d\sigma$ situé en P est égal en valeur absolue à la projection de $d\sigma$ sur un plan perpendiculaire à $\vec{a}$. Mais la figure montre bien que la contribution $\vec{a}\vec{d\sigma}'$, relative à l'élément $d\sigma'$ en P', obtenu en coupant Σ par le

cylindre projetant le contour de $d\sigma$, est égale et de signe contraire à la contribution $\vec{a}\,\vec{d\sigma}$. Dès lors

$$\vec{a} \cdot \iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} = 0\,;$$

cette égalité devant avoir lieu quel que soit le vecteur $\vec{a}$, on aura donc

$$\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} = 0.$$

La démonstration s'étend sans peine au cas où il existe des droites qui coupent Σ en plus de deux points. Par exemple, dans le cas de la figure 23, on emploiera une surface Σ' qui forme, en prenant alternati-

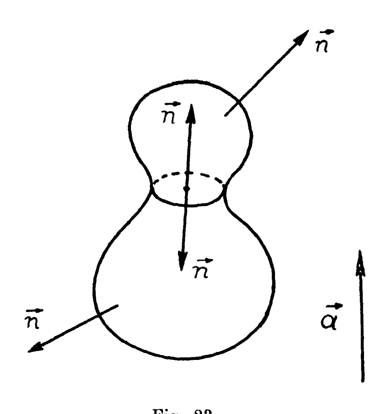


Fig. 23.

vement les deux sens possibles sur sa normale comme sens positifs, une surface fermée avec une portion de Σ et une autre surface fermée avec le reste de Σ. Pour chacune de ces surfaces fermées l'intégrale $\iint \vec{d\sigma}$ est nulle ; la somme des deux intégrales est nulle, mais comme la contribution de Σ' dans un cas est opposée à la contribution de Σ' dans l'autre cas, on aura bien encore

$$\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} = 0.$$

64. On donne des noms particuliers aux deux intégrales

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad \text{et} \quad \iint_\Sigma \vec{v} \cdot \vec{d\sigma} \;;$$

la première s'appelle la *circulation* de $\vec{v}$ le long de C, la seconde s'appelle le *flux* de $\vec{v}$ à travers Σ ; $\vec{v} \cdot d\vec{r}$ est la *circulation élémentaire* et $\vec{v} \cdot \vec{d\sigma}$ le *flux élémentaire*. La longueur de C est la circulation de $\vec{t}$ le long de C, l'aire de Σ est le flux de $\vec{n}$ à travers Σ.

Une autre grandeur géométrique importante est l'*angle solide* sous lequel d'un point O on voit une surface Σ.

Considérons le vecteur $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ et le champ

$$\vec{v}(P) = \frac{\vec{r}}{r^3} \;;$$

formons $\vec{v} \cdot \vec{d\sigma}$ en un point P d'une surface

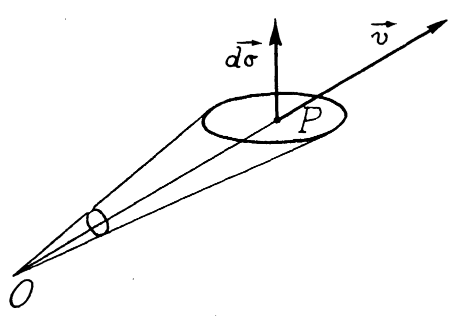


Fig. 24.

On a

$$\vec{v}\, \vec{d\sigma} = v \cos \varphi \, d\sigma = v \, d\sigma',$$

où φ est l'angle de $\vec{v}$ et de $\vec{d\sigma}$ et où $d\sigma'$ est la projection de $d\sigma$ sur la sphère de centre O passant par P, cette projection étant centrale. En effet, $d\sigma$ est infiniment petit, la projection centrale à partir de O est égale, si r est fini, à la projection orthogonale de $d\sigma$ sur le plan perpendiculaire à $\vec{r}$ en P, à un infiniment petit près d'ordre supérieur à l'ordre de $d\sigma$.

De plus $|v d\sigma'|$ est égal à l'aire interceptée par le cône projetant $d\sigma$ sur la sphère de rayon un, centrée en O. Ce nombre est l'angle solide sous lequel de O on voit $d\sigma$. On donnera un signe à cet angle solide ; il sera

positif si $\overrightarrow{OP}$ rencontre Σ par la face négative, c'est le cas de la figure, il sera négatif dans l'autre cas.

L'angle solide sous lequel on voit de O la surface Σ est donc

$$\iint_{\Sigma} \frac{\vec{r}\,\overrightarrow{d\sigma}}{r^3}.$$

Si Σ est fermée et si O est intérieur, cet angle vaut 4π ; il vaut zéro si O est extérieur, et enfin, si O est sur Σ il vaut 2π pour autant que O est un point régulier de Σ ; on voit sans difficulté que l'intégrale précédente a un sens malgré le fait que r est nul en O.

Les opérateurs différentiels.

65. On sait que la dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle s'obtient en considérant les valeurs de f aux extrémités d'un intervalle (x, x'), on forme leur différence qu'on divise par la longueur de l'intervalle ; on fait tendre x' vers x et on cherche la limite de ce rapport :

$$\lim_{x' \to x} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'},$$

si cette limite existe, quelle que soit la manière dont x' tend vers x, elle est dite la dérivée de $f(x)$ en x.

Lorsqu'on veut chercher à généraliser la notion de dérivée à des fonctions $f(P)$ ou $\vec{v}(P)$ définissant des champs scalaires ou des champs vectoriels, on peut procéder comme on l'a fait déjà pour un scalaire en prenant des droites passant par P le long de chacune desquelles f ou $\vec{v}$ ne dépendent que d'une variable. Mais on conçoit bien que ce procédé ne renseigne pas complètement sur la variation de f ou de $\vec{v}$ autour de P ; on a vu pour f que l'étude complète de cette variation, au premier ordre tout au moins, est conditionnée par le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ qui permet de trouver $\frac{df}{ds}$ quel que soit le vecteur $\vec{s}$, pourvu qu'on ait déjà figuré les surfaces de niveau voisines de P.

Il existe cependant un procédé systématique applicable, à f aussi bien qu'à $\vec{v}$, qui généralise parfaitement la notion de dérivée et qui fait intervenir les valeurs de f ou de $\vec{v}$ en *tous* les points voisins de P.

On entoure P d'une surface fermée Σ, située tout entière dans R, et dont l'élément est représenté par le vecteur $\vec{d\sigma}$. On calcule les rapports suivants :

$$\frac{\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma}\, f(Q)}{\tau}, \quad \frac{\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot \vec{v}(Q)}{\tau}, \quad \frac{\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \times \vec{v}(Q)}{\tau},$$

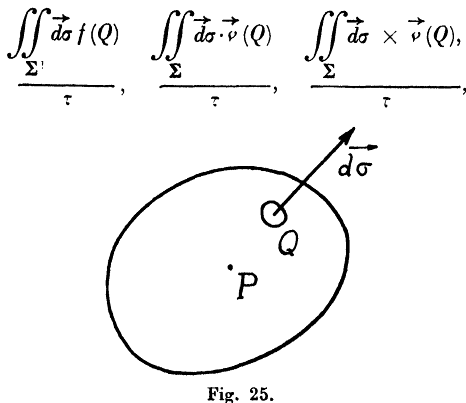


Fig. 25.

les numérateurs étant des intégrales de surface étendues à Σ tout entière, et τ étant le volume limité par Σ.

On fait tendre τ vers zéro de façon que l'aire de Σ tende aussi vers zéro, c'est-à-dire que tous les points de Σ tendent vers P ; si les limites des rapports précédents existent quelle que soit la manière dont τ tend vers zéro, on les appellera respectivement

gradient du champ scalaire f en P,

divergence du champ vectoriel $\vec{v}$ en P,

rotationnel du champ vectoriel $\vec{v}$ en P,

ce qu'on écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f, \ \text{div}\, \vec{v} \ \text{et} \ \overrightarrow{\text{rot}}\, v.$$

On peut cependant utiliser un symbole unique pour représenter ces trois opérations.

On écrira

$$\vec{\nabla} f = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma}\, f(Q)}{\tau}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot \vec{v}(Q)}{\tau} \qquad \left(\text{ou aussi } \vec{\nabla}\, \vec{v}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \times \vec{v}(Q)}{\tau}$$

et l'on prononcera *del eff*, *del point vé* (ou même *del vé*), *del cross vé*[1].

$\vec{\nabla}$ est un opérateur, mais cet opérateur est en même temps une sorte de vecteur symbolique qui est en rapport étroit avec les vecteurs $d\sigma$.

Ces définitions, dont la première est équivalente, comme on le verra, à celle qui a été donnée plus haut du gradient, sont des définitions intrinsèques, au moyen desquelles il sera particulièrement aisé, sinon de calculer numériquement, du moins d'étudier directement les propriétés des champs.

66. Il est bon de savoir calculer toutes ces grandeurs en coordonnées cartésiennes. On utilisera pour cela les notations suivantes :

champ scalaire : $f(P) = F(x, y, z)$

champ vectoriel : $\vec{v}(P) = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$

et l'on prendra le volume τ dans le stade infinitésimal $d\tau$, ce sera un

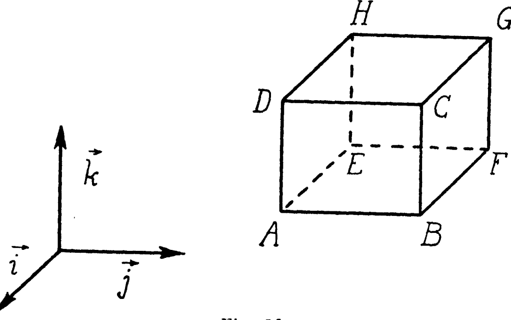


Fig. 26.

parallélipipède rectangle dont $P(x, y, z)$ occupe le centre et dont les faces sont perpendiculaires à $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, les dimensions étant dx, dy, dz. Il y aura six éléments de surfaces à considérer et on pourra prendre six points Q au milieu des six faces. Ces points auront les coordonnées suivantes

$$\left(x \pm \frac{dx}{2},\ y,\ z\right),\quad \left(x,\ y \pm \frac{dy}{2},\ z\right),\quad \left(x,\ y,\ z \pm \frac{dz}{2}\right)$$

[1] On appelle parfois cet opérateur *nabla*, mais nous emploierons le nom donné par Gibbs.

et les faces correspondantes seront représentées par les vecteurs

$$\pm \vec{i}\, dy\, dz, \quad \pm \vec{j}\, dz\, dx, \quad \pm \vec{k}\, dx\, dy.$$

Les fonctions $f(Q)$ et $\vec{\varphi}(Q)$ auront aux six points considérés des valeurs faciles à calculer, au second ordre près, si l'on admet que $F(x, y, z)$, $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ ont des dérivées partielles du premier ordre continues. Par exemple pour le point Q milieu de $ABCD$:

$$f(Q) = F\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) = F(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{2};$$

on écrira même $F(x, y, z) = F_0$, car dans le passage à la limite P est fixe [1].

1. *Calcul de* $\vec{\nabla} f$. On devra calculer $\iint \vec{d\sigma}\, f$ étendue aux six faces.

Contribution de $ABCD$: $\vec{i}\, F_0\, dy\, dz + \vec{i}\, \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{dx}{2}\, dy\, dz$

Contribution de $EFGH$: $-\vec{i}\, F_0\, dy\, dz - \vec{i}\, \dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{-dx}{2}\, dy\, dz$

dont la somme est

$$\vec{i}\, \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy\, dz.$$

On obtiendra pour les six faces

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}\right) dx\, dy\, dz,$$

en divisant par $d\tau = dx\, dy\, dz$, il reste

$$\vec{\nabla} f(P) = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}.$$

2. *Calcul de* $\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}$. On devra calculer $\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma}\cdot\vec{\varphi}$ étendue aux six faces.

Contribution de $ABCD$: $\vec{i}\, dy\, dz\left[\vec{\varphi}_0 + \dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{dx}{2}\vec{i} + \dfrac{\partial Y}{\partial x}\dfrac{dx}{2}\vec{j} + \dfrac{\partial Z}{\partial x}\dfrac{dx}{2}\vec{k}\right]$

Contribution de $EFGH$: $-\vec{i}\, dy\, dz\left[\vec{\varphi}_0 - \dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{dx}{2}\vec{i} - \dfrac{\partial Y}{\partial x}\dfrac{dx}{2}\vec{j} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}\dfrac{dx}{2}\vec{k}\right]$

dont la somme est

$$\frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy\, dz.$$

[1] Il est clair qu'on pourrait rendre ce calcul plus rigoureux en prenant des figures de grandeurs finies et en appliquant le théorème des accroissements finis.

Pour les six faces, et après division par *dx dy dz*, on trouve

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

3. *Calcul de* $\vec{\nabla}\times\vec{v}$. On devra calculer $\iint_\Sigma \vec{d\sigma}\times\vec{v}$ étendue aux six faces.

Contribution de $ABCD$:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dy\,dz & 0 & 0 \\ X_0+\frac{\partial X}{\partial x}\frac{dx}{2}, & Y_0+\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{dx}{2}, & Z_0+\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{2} \end{vmatrix} = dydz\left[-\vec{j}Z_0+\vec{k}Y_0+\left(-\vec{j}\frac{\partial Z}{\partial x}+\vec{k}\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]$$

contribution de $EFGH$:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -dy\,dz & 0 & 0 \\ X_0-\frac{\partial X}{\partial x}\frac{dx}{2}, & Y_0-\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{dx}{2}, & Z_0-\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{2} \end{vmatrix} = dydz\left[\vec{j}Z_0-\vec{k}Y_0+\left(-\vec{j}\frac{\partial Z}{\partial x}+\vec{k}\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right],$$

dont la somme est

$$\left(-\vec{j}\frac{\partial Z}{\partial x}+\vec{k}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz.$$

Pour les six faces, et après division par *dx dy dz*, on trouve

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ces trois expressions s'obtiennent le mieux du monde en considérant $\vec{\nabla}$ effectivement comme un vecteur dont la forme cartésienne est :

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

alors

$$\vec{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

où il faut entendre que F dans le second membre est la fonction de x, y, z qui représente le champ F. Ensuite

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}\right)$$

on fait le produit scalaire comme de coutume et on remplace le produit $\frac{\partial}{\partial x} X$ par $\frac{\partial X}{\partial x}$, alors

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Enfin

$$\vec{\nabla} \times \vec{\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

qui est un déterminant doublement symbolique dont le développement redonne le résultat écrit plus haut.

67. On pourrait se contenter d'avoir montré que les deux expressions cartésiennes du gradient, obtenues au moyen des deux définitions, sont identiques et on affirmerait sans plus que ces deux définitions sont équivalentes. Si l'on désire ne pas recourir aux axes, on procédera de la manière suivante : on prendra un petit parallélipipède dont deux faces sont tangentes en Q et en Q' à deux surfaces de niveau infiniment voisines, P étant au milieu de QQ'. Aux autres points Q sur les quatre faces latérales correspondent la même valeur de f, car ils sont sur la surface de niveau de P, les contributions des surfaces latérales à l'intégrale de surface $\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma}\, f$ ont un total nul et l'on trouve bien pour la limite du rapport de cette intégrale au volume du parallélipipède un vecteur dirigé selon $\vec{n}$ et de grandeur égale à $\frac{df}{dn}$. Les deux définitions du gradient sont donc équivalentes.

68. On a vu déjà que le calcul de la différentielle d'un scalaire $f(P)$ se ramène au calcul du produit scalaire de $\vec{dr}$ par $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$, $\vec{dr}$ étant le vecteur infiniment petit qui joint les deux points en lesquels on prend les deux valeurs de f dont on calcule la différence, (§ 59) :

$$df = \vec{dr} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, f$$

ce qui s'écrit aussi

$$df = (\vec{s}\,\vec{\nabla})\, f\, ds,$$

avec $\vec{dr} = \vec{s}\,ds$[1]. L'opérateur $\vec{s}\vec{\nabla}$ se définit bien évidemment aussi de la façon suivante

$$(\vec{s}\vec{\nabla})\,f = \lim_{\tau=0} \frac{\iint_{\Sigma} (\vec{s}\,\vec{d\sigma})\,f}{\tau}$$

et cette formule n'est valable que si $\vec{s}$ est un vecteur constant.

On peut aussi calculer $d\vec{v}$, $\vec{v}(P)$ étant un champ vectoriel. On a encore

$$d\vec{v} = (\vec{s}\vec{\nabla})\,\vec{v}\,ds, \qquad (1)$$

avec

$$(\vec{s}\vec{\nabla})\,\vec{v} = \lim_{\tau=0} \frac{\iint_{\Sigma} (\vec{s}\,\vec{d\sigma})\,\vec{v}}{\tau} \qquad (2)$$

Cette dernière formule qui *définit* $(\vec{s}\vec{\nabla})\,\vec{v}$ n'est encore applicable que si $\vec{s}$ est constant ; la première donne $\vec{v}(P') - \vec{v}(P)$ avec $\overrightarrow{PP'} = \vec{s}\,ds$[1].

On la démontre en partant de la définition de $\vec{s}\vec{\nabla}$; on choisit un volume élémentaire cylindrique, les bases étant deux petits cercles dont P et P' sont les centres, et dont les plans sont perpendiculaires à $\overrightarrow{PP'}$, c'est-à-dire à $\vec{s}$. La contribution de la surface latérale à l'intégrale de surface est nulle parce que tous les $\vec{d\sigma}$ latéraux sont perpendiculaires à $\vec{s}$, donc pour eux $(\vec{s}\,\vec{d\sigma})\,\vec{v} = 0$. Il restera alors, en appelant C l'aire des bases,

$$(\vec{s}\vec{\nabla})\,\vec{v} = \frac{\vec{v}(P')\cdot C - \vec{v}(P)\cdot C}{|PP'|\cdot C},$$

d'où

$$(\vec{s}\vec{\nabla})\,\vec{v}\cdot|PP'| = \vec{v}(P') - \vec{v}(P),$$

ce qui redonne bien (1).

On peut aussi définir l'opération $(\vec{s}\times\vec{\nabla})$ par les égalités :

$$(\vec{s}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{u} = \lim_{\tau=0} \frac{\iint_{\Sigma} (\vec{s}\times\vec{d\sigma})\cdot\vec{u}}{\tau}$$

[1] On a ici $|\vec{s}| = 1$.

$$(\vec{s} \times \vec{\nabla}) \times \vec{u} = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint\limits_{\Sigma} (\vec{s} \times \vec{d\sigma}) \times \vec{u}}{\tau}.$$

Règles de calcul.

69. L'opération dont $\vec{\nabla}$ est le symbole est évidemment distributive par rapport à l'addition. On a

$$\vec{\nabla}\,(f + g) = \vec{\nabla}\, f + \vec{\nabla}\, g$$

$$\vec{\nabla}\,(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{\nabla}\,\vec{u} + \vec{\nabla}\,\vec{v}$$

et

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{\nabla} \times \vec{v}.$$

Cela tient au fait que l'intégrale et le passage à la limite sont deux opérations distributives par rapport à l'addition, *linéaires* en un mot.

Il est des cas où un champ est défini par une intégrale, par exemple

$$g\,(P) = \iint\limits_{\Sigma} F\,(P, Q)\, d\sigma_Q,$$

où $F(P, Q)$ est une fonction scalaire des deux points P et Q. A-t-on le droit d'écrire

$$\vec{\nabla} g\,(P) = \iint\limits_{\Sigma} \vec{\nabla}_P\, F\,(P, Q)\, d\sigma_Q\,?$$

L'indice P a pour but de faire remarquer que l'opérateur ne porte que sur F, considérée comme fonction de P, Q étant un point censé fixe dans l'opération $\vec{\nabla}_P$.

La formule précédente est l'analogue de la formule de dérivation par rapport à un paramètre sous le signe $\int$.

La démonstration en est aisée dans des conditions assez restrictives. Soit P' un point voisin de P

$$\overrightarrow{PP'} = \Delta s \cdot \vec{s},$$

on a :

$$\frac{g\,(P') - g\,(P)}{\Delta s} = \iint\limits_{\Sigma} \frac{F(P', Q) - F\,(P, Q)}{\Delta s}\, d\sigma_Q.$$

Si l'on admet que $F(P, Q)$ considérée comme fonction de P a un gradient, on aura

$$F(P', Q) - F(P, Q) = \Delta s \left(\frac{dF(P, Q)}{ds}\right)_{P_1},$$

P_1 étant un point situé entre P et P'. Donc à la limite, si le gradient est continu :

$$\frac{dg(P)}{ds} = \iint_{\Sigma} \left(\frac{dF}{ds}\right)_P d\sigma_Q,$$

ou encore

$$\vec{s}\,\overrightarrow{\text{grad}}\; g(P) = \iint_{\Sigma} \vec{s}\,\overrightarrow{\text{grad}}_P\, F(P, Q) d\sigma_Q,$$

ou, puisque cette formule est vraie quelle que soit la direction $\vec{s}$:

$$\vec{\nabla} g = \iint_{\Sigma} \vec{\nabla}_P F(P, Q) d\sigma_Q.$$

On étendra la règle du $\vec{\nabla}$ agissant sur une intégrale à tous les cas possibles : intégrales curvilignes, intégrales de volume, portant sur des vecteurs ou des scalaires. Pour les $\vec{\nabla} \times$, où le théorème des accroissements finis n'est pas immédiatement applicable, on fera intervenir un vecteur constant $\vec{s}$ et l'on aura à traiter de produits mixtes où le signe *cross* ne sera plus immédiatement après $\vec{\nabla}$.

70. On trouve les formules qui permettent d'obtenir le $\vec{\nabla}$ d'un produit en remarquant d'abord que l'élément différentiel sous le signe $\iint_{\Sigma}$ dans la définition de $\vec{\nabla}$ est de la forme

$\vec{d\sigma}$ qui multiplie le produit considéré.

Prenons un cas qui permet de traiter tous les autres par analogie :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})}{\tau}.$$

mais

$$\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot \left(\vec{u}(Q) \times \vec{v}(Q)\right) = \iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot \left(\vec{u}(P) \times \vec{v}(Q)\right) + \iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot \left(\vec{u}(Q) \times \vec{v}(P)\right) +$$

$$+ \iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot \left\{\left[\vec{u}(Q) - \vec{u}(P)\right] \times \left[\vec{v}(Q) - \vec{v}(P)\right]\right\} - \iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot \left\{\vec{u}(P) \times \vec{v}(P)\right\}.$$

Les deux premières intégrales du second membre divisées par τ ont pour limites

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u} \times \vec{v}\right),$$

dans la première $\vec{v}$ est considéré comme un champ variable tandis que $\vec{u}$ est constant, il a dans tout l'espace la valeur qu'il a en P ; dans la deuxième, $\vec{u}$ est variable et $\vec{v}$ constant.

La troisième intégrale est un infiniment petit d'ordre supérieur au volume, elle est en effet de la forme

$$\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot \left(d\vec{u} \times d\vec{v}\right)$$

en divisant par τ, on obtient une quantité infiniment petite.

La quatrième intégrale est nulle, car elle peut s'écrire

$$\left[\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma}\right] \cdot \vec{u}(P) \times \vec{v}(P)$$

et $\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} = 0$ puisque Σ est fermée.

On pourra donc écrire

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\underset{\uparrow}{\vec{u}} \times \vec{v}\right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u} \times \underset{\uparrow}{\vec{v}}\right) \qquad (1)$$

la flèche verticale placée sous une lettre indique que cette lettre est la *seule* grandeur qui doit être considérée comme *variable* dans la parenthèse qui la contient.

La règle qu'exprime l'équation (1) s'applique à tous les cas et elle s'étend aux produits de plus de deux facteurs. Le lecteur le verra bien aisément.

La suite des opérations s'effectue en remarquant que $\vec{\nabla}$ est un vecteur ; on appliquera donc les règles du calcul vectoriel en ayant toujours soin de ne jamais mettre à gauche de $\vec{\nabla}$ des grandeurs varia-

bles figurant d'abord à sa droite, même si l'algèbre vectorielle permettait un tel transbordement, car $\vec{\nabla}$ est encore — et surtout — un opérateur agissant sur les grandeurs variables placées à sa droite.

Nous obtiendrons donc les formules relatives aux produits en appliquant la formule (1) appropriée à chaque cas particulier, et en faisant des transformations dont le but est toujours d'amener $\vec{\nabla}$ à toucher le facteur variable et si possible à l'isoler à l'extrémité droite d'un monôme. Il sera aussi utile d'avoir la formule définitive avec les notations $\overrightarrow{\text{grad}}$, div, $\overrightarrow{\text{rot}}$.

1° $$\vec{\nabla}(fg) = \vec{\nabla}(\underset{\uparrow}{f}g) + \vec{\nabla}(f\underset{\uparrow}{g}) = (\vec{\nabla} f)g + f(\vec{\nabla} g) = g\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} g$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, fg = g\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f + f\,\overrightarrow{\text{grad}}\, g$$

2° $$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{v}) = \vec{\nabla}(\underset{\uparrow}{f}\vec{v}) + \vec{\nabla}(f\underset{\uparrow}{\vec{v}}) = \vec{\nabla} f\cdot\vec{v} + f\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\text{div}(f\vec{v}) = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\, f + f\,\text{div}\,\vec{v}$$

3° $\vec{\nabla}\times(f\vec{v}) = \vec{\nabla}\times(\underset{\uparrow}{f}\vec{v}) + \vec{\nabla}\times(f\underset{\uparrow}{\vec{v}}) = \vec{\nabla} f\times\vec{v} + f\vec{\nabla}\times\vec{v}$[1] $= f\vec{\nabla}\times\vec{v} - \vec{v}\times\vec{\nabla} f$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, f\vec{v} = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} - \vec{v}\times\overrightarrow{\text{grad}}\, f$$

4° $$\vec{\nabla}(\vec{u}\,\vec{v}) = \vec{\nabla}(\underset{\uparrow}{\vec{u}}\,\vec{v}) + \vec{\nabla}(\vec{u}\,\underset{\uparrow}{\vec{v}}).$$

or
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - (\vec{a}\,\vec{b})\vec{c}$$

d'où
$$\vec{b}(\vec{c}\,\vec{a}) = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{a}\,\vec{b})\vec{c},$$

donc :
$$\vec{\nabla}(\underset{\uparrow}{\vec{u}}\,\vec{v}) = \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{u},$$

et par conséquent :
$$\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) + \vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u}\,\vec{\nabla})\vec{v}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{v}\times\overrightarrow{\text{rot}\,u} + \vec{u}\times\overrightarrow{\text{rot}\,v} + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u}\,\vec{\nabla})\vec{v}.$$

5° $$\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{\nabla}(\underset{\uparrow}{\vec{u}}\times\vec{v}) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\times\underset{\uparrow}{\vec{v}}).$$

On peut intervertir le point et la croix :
$$\vec{\nabla}\cdot(\underset{\uparrow}{\vec{u}}\times\vec{v}) = (\vec{\nabla}\times\vec{u})\cdot\vec{v}$$

[1] On a appliqué la formule $\vec{a}\times m\vec{b} = \vec{a}\,m\times\vec{b}$ où $\vec{a} = \vec{\nabla}$, $m = f$, $\vec{b} = \vec{v}$.

donc :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = (\vec{\nabla}\times\vec{u})\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v}$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}\, u} - \vec{u}\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}\, v}$$

6° $$\vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{\nabla}\times(\underset{\uparrow}{\vec{u}}\times\vec{v}) + \vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\underset{\uparrow}{\vec{v}}),$$

or

$$\vec{\nabla}\times(\underset{\uparrow}{\vec{u}}\times\vec{v}) = (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}),$$

d'où

$$\vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{u}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}),$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{u}\times\vec{v}) = (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{v}\operatorname{div}\vec{u} + \vec{u}\operatorname{div}\vec{v}.$$

On trouvera plus loin quelques exercices qui compléteront ce jeu de formules.

Itération de $\vec{\nabla}$.

71. L'application de $\vec{\nabla}$ à un champ redonne un champ. Il est utile de savoir appliquer à nouveau $\vec{\nabla}$ à ces champs dérivés. L'itération de $\vec{\nabla}$ conduira à des expressions qu'on peut écrire presque infailliblement si l'on est assuré que, pour cette double opération, $\vec{\nabla}$ est encore à considérer comme un vecteur symbolique.

On aura

1° $$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f \quad \text{ou} \quad \operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \nabla^2 f; \qquad (1)$$

on introduit ici un nouveau nom pour désigner l'opérateur div $\overrightarrow{\operatorname{grad}} = \nabla^2$, on l'appelle le *laplacien* et on le représente par lap :

$$\operatorname{lap} f = \operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}} f;$$

en cartésien

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

donc

$$\operatorname{lap} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

où il est entendu que f désigne, soit le champ $f(P)$, soit la fonction de x, y, z qui représente ce champ.

Ensuite

2° $$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) f = 0 \qquad (2)$$

car $\vec{a} \times \vec{a} = 0$; donc

$$\overrightarrow{\text{rot grad}}\, f = 0.$$

Puis

3° $$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} = (\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{u}) = 0 \qquad (3)$$

car $(\vec{a}\,\vec{a}\,\vec{b}) = 0$; donc

$$\text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}\ u} = 0.$$

4° $$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{u} \qquad (4)$$

c'est un vecteur dont les composantes sont

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.$$

5° L'opérateur $(\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{u}$ est essentiellement nouveau ; on l'appellera encore laplacien de $\vec{u}$. Sa définition intrinsèque est donnée par les considérations suivantes :

6° $$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{u}) - \nabla^2 \vec{u} \qquad (5)$$

si l'on applique la formule du double produit vectoriel ; donc

$$\text{lap}\ \vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ u - \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}\ u},,$$

les opérateurs dans le second membre étant définis par les passages à la limite qu'on connaît.

Il est bien clair que les identités (2), (3), (5) ne sont pas démontrées ; nous les avons obtenues par induction. On peut les vérifier par la méthode des coordonnées pourvu qu'on écrive

$$\text{lap} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Mais il convient de les démontrer directement. Les considérations du chapitre suivant le permettront.

Exercices.

1. On a vu au § 31 que la distribution des vitesses dans un corps solide qui a un point fixe est donnée par la formule

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP};$$

montrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} = 2\vec{\omega}$, $\text{div}\, \vec{v} = 0$.

2. Dans un champ vectoriel $\vec{v}(P)$, on considère les *lignes de champ*, c'est-à-dire les courbes tangentes au champ en chacun de leurs points : calculer leur courbure et leur torsion en fonction de $\vec{v}(P)$. [On aura $\vec{t} = \frac{\vec{v}(P)}{v}$, $\frac{1}{\rho} = \left|(\vec{t}\vec{\nabla})\vec{t}\right|$, $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{[(\vec{t}\vec{\nabla})\vec{t}\,]^2}\left[\vec{t} \times (\vec{t}\vec{\nabla})\vec{t} \cdot (\vec{t}\vec{\nabla})^2\vec{t}\,\right]$ où $(\vec{t}\vec{\nabla})^2$ est un opérateur dont la signification est bien claire].

3. Si $\overrightarrow{PP'} = h\vec{s}$, on aura

$$f(P') = f(P) + \frac{h}{1!}(\vec{s}\vec{\nabla})f(P) + \frac{h^2}{2!}(\vec{s}\vec{\nabla})^2 f(P) + \ldots + \frac{h^n}{n!}(\vec{s}\vec{\nabla})^n f(P) + \ldots$$

où $(\vec{s}\vec{\nabla})^n$ est un opérateur défini par la formule

$$(\vec{s}\vec{\nabla})^n f = (\vec{s}\vec{\nabla})(\vec{s}\vec{\nabla})^{n-1} f.$$

4. Déterminer le gradient du champ scalaire dont les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes de révolution aux méridiens homofocaux, la valeur du champ sur chacune de ces surfaces étant proportionnelle à son grand axe. Trouver les lignes de champ du gradient de ce scalaire.

5. Montrer que le champ vectoriel $\vec{v}(P)$, perpendiculaire à un plan fixe, dont l'intensité en chaque point est fonction de la distance à ce plan, est le gradient d'un champ scalaire.

6. Même problème pour un champ perpendiculaire à un axe, dont l'intensité est fonction de la distance à cet axe.

7. Si les lignes de champ de $\vec{v}(P)$ sont orthogonales à une famille de surfaces, leur courbure $\frac{1}{\rho}$ est donnée par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \left|\vec{\nabla} \times \frac{\vec{v}(P)}{v(P)}\right|.$$

8. Calculer $\text{div}\, \vec{r}$, $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{r}$, $\text{div}\, \varphi(r)\vec{r}$, $\text{div}\, \frac{\vec{r}}{r^3}$, $\text{lap}\, \frac{1}{r}$, où le champ $\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP}$, $\varphi(r)$ étant une fonction de $r = |OP|$.

9. Un champ scalaire $f(P)$ est défini par l'équation

$$f(P) = (\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w})$$

où $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois champs vectoriels ; calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ et $\text{lap}\, f$. Cas particulier : $\vec{u} = r^2\vec{r}$, $\vec{v} = (\vec{u}\,\vec{r})\vec{a}$, $\vec{w} = \vec{r} \times \vec{b}$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ étant deux vecteurs constants.

10. L'opérateur $\vec{\nabla}$ est appliqué trois fois de suite à un champ scalaire $f(P)$. Examiner les cas possibles.

11. Même problème pour un champ vectoriel $\vec{v}(P)$.

12. Quelle est la signification de l'expression $[(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{w}]$? (Il est entendu ici que $\vec{\nabla}$ porte sur tout ce qui suit ce symbole) ; la calculer.

13. Mêmes questions pour $[(\vec{\nabla}\vec{u})\vec{v}]$ $[(\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{v}]$.

14. Etablir quelques formules où intervient l'opérateur $\vec{\nabla}$ itéré portant sur un produit ; par exemple $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times f\vec{v}$, $\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{v})]$, ou encore $\vec{\nabla} \cdot f\,\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{v})$, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{u}$.

15. Etablir les formules du § 70 en partant de la forme cartésienne de $\vec{\nabla}$; on verra que quelques-unes d'entre elles s'obtiennent par des calculs assez fastidieux.

16. $\vec{v}(P)$ étant un champ quelconque, et $\vec{r}(P)$ ayant la signification habituelle, montrer que

$$(\vec{v}\,\vec{\nabla})\,\vec{r} = \vec{v}.$$

17. Si $\vec{a}$ est un vecteur unité constant, on a

$$\vec{a}\,[\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{a} \cdot \vec{v}) + \overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{a} \times \vec{v})] = \text{div}\,\vec{v}.$$

18. Calculer les projections du champ $\vec{v}(P)$ sur les plans tangents aux surfaces de niveau du champ scalaire $f(P)$ et sur les normales à ces surfaces.

$$\left[\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, f \times (\vec{v} \times \overrightarrow{\text{grad}}\, f)}{(\overrightarrow{\text{grad}}\, f)^2} \quad \text{et} \quad \frac{(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, f)\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f}{(\overrightarrow{\text{grad}}\, f)^2}\right].$$

CHAPITRE V

Théorie des champs (suite). Transformations de certaines intégrales multiples.

Transformation d'intégrales triples.

72. Les définitions que nous avons données des diverses opérations qu'on peut faire au moyen du symbole $\vec{\nabla}$ conduisent immédiatement à certains théorèmes de calcul intégral qu'on démontre d'une manière très laborieuse par la méthode des coordonnées.

Soit $f(P)$ un champ scalaire possédant un gradient. Considérons une surface fermée Σ (formée d'une ou plusieurs parties) limitant un certain volume V. Décomposons ce volume en N parties et désignons par $\Delta\tau_i$ le volume de la $i^{ème}$; soit P_i un point dans celle-ci. Appelons de plus Σ_i la surface qui limite $\Delta\tau_i$.

Si $f(P)$ admet en chaque point de V et sur Σ un gradient, on pourra poser

$$\vec{\nabla} f(P_i)\,\Delta\tau_i + \vec{\varepsilon_i}\Delta\tau_i = \iint_{\Sigma_i} f\,\vec{d\sigma} \qquad (1)$$

où $\vec{\varepsilon_i}$ est un vecteur qui tend vers zéro lorsque tous les points de Σ_i tendent vers P_i. Soit $\vec{\eta}$ le plus grand des vecteurs $\vec{\varepsilon_i}$; $\vec{\eta}$ tend vers zéro lorsque le nombre N augmente indéfiniment et lorsque chaque volume $\Delta\tau_i$ tend vers zéro dans toutes ses dimensions. En faisant la somme membre à membre de toutes les équations (1), il est manifeste qu'on obtiendra pour le second membre une intégrale de surface étendue à toutes les portions des Σ_i qui ne sont pas des cloisons mitoyennes à deux portions de volume. Si f est une fonction bornée, cette intégrale sera justement

$$\iint_{\Sigma} f\,\vec{d\sigma}$$

car les intégrales sur les surfaces mitoyennes s'entre-détruisent complètement.

Le premier membre de la somme tend vers

$$\iiint_V \vec{\nabla} f(P)\, d\tau$$

car $|\Sigma \varepsilon_i \Delta\tau_i| < \eta\, V$, V étant le nombre mesurant le volume total et η tendant vers zéro. On a donc

$$\iiint_V \vec{\nabla} f(P)\, d\tau = \iint_\Sigma f\, \vec{d\sigma}.$$

Cette égalité exprime le *théorème du gradient.* On en tire, en coordonnées cartésiennes, la formule connue :

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma f\, dy\, dz.$$

En faisant les mêmes hypothèses sur le champ vectoriel $\vec{v}(P)$, on trouve aussi

$$\iiint_V \vec{\nabla} \times \vec{v}\, d\tau = -\iint_\Sigma \vec{v} \times \vec{d\sigma}, \tag{2}$$

ou, en coordonnées cartésiennes, pour la composante en $\vec{i}$:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma (\beta Z - \gamma Y)\, d\sigma,$$

α, β, γ, étant les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface Σ et X, Y, Z, les composantes de $\vec{v}$. L'égalité (2) exprime le *théorème du rotationnel.*

De même

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, d\tau = \iint_\Sigma \vec{v} \cdot \vec{d\sigma};$$

cette égalité exprime le *théorème de la divergence,* ou comme on l'appelle aussi le *théorème d'Ostrogradzky.* Si v_n représente la projection de $\vec{v}$ sur la normale $\vec{n}$ extérieure à Σ

$$\vec{v}\, \vec{d\sigma} = v_n\, d\sigma,$$

c'est ce qu'on appelle le *flux élémentaire* du champ qui sort de la surface $d\sigma$; dès lors : *l'intégrale étendue au volume V, limité par une*

surface Σ, de la divergence d'un champ $\vec{v}$ est égale au flux total de ce champ sortant de Σ.

En coordonnées, ces relations s'écrivent :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\,d\sigma.$$

Cette formule a de nombreuses applications.

Prenons $\vec{v}(P) = \vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$: $\operatorname{div}\vec{r} = 3$, donc

$$\iiint_V d\tau = \frac{1}{3}\iint_\Sigma (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,d\sigma\,;$$

l'interprétation géométrique est bien claire : le volume total limité par Σ est égal à la somme algébrique des volumes des pyramides élémentaires dont O est le sommet et dont les bases sont les éléments d'aire de Σ ; les hauteurs de ces pyramides sont bien évidemment $\vec{r}\cdot\vec{n} = \alpha x + \beta y + \gamma z$; les bases sont positives ou négatives suivant que $\overrightarrow{OP}$ arrive à la surface par la face négative ou par la face positive.

Supposons que $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f$, $\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{lap} f$; d'autre part

$$\vec{d\sigma}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f = (\vec{n}\,\vec{\nabla})\, f\, d\sigma = \frac{df}{dn}\,d\sigma,$$

et alors :

$$\iiint_V \operatorname{lap} f\, d\tau = \iint_\Sigma \frac{df}{dn}\,d\sigma.$$

Cette formule est importante dans la théorie des fonctions harmoniques. On peut l'énoncer encore : l'intégrale du laplacien de f étendue au volume V est égale au flux total du gradient de f qui sort de Σ.

Transformation d'une intégrale curviligne; théorème d'Ampère-Stokes.

73. On va démontrer une formule très importante qui permet de passer de certaines intégrales curvilignes, étendues à des courbes fermées, à des intégrales prises sur des surfaces limitées par ces courbes. Mais, auparavant, un lemme est nécessaire.

Soit un volume cylindrique limité par une surface latérale S et deux bases perpendiculaires au vecteur unité $\vec{a}$. Soit de plus un champ $\vec{v}(P)$ défini dans une région contenant ce cylindre.

On aura bien évidemment, par la définition même de $\vec{\nabla} \times \vec{v}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint \vec{a} \cdot (\vec{d\sigma} \times \vec{v})}{\tau} = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint \vec{v} \cdot (\vec{a} \times \vec{d\sigma})}{\tau} ;$$

on prendra pour volume le cylindre lui-même dont on imaginera qu'il se réduise ensuite au point P situé sur l'une des bases. Or, pour les surfaces élémentaires.des bases, on a :

$$\vec{v} \cdot (\vec{a} \times \vec{d\sigma}) = 0$$

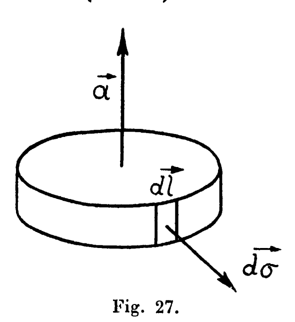


Fig. 27.

la surface latérale S donnera seule une contribution au numérateur. Or, si l'on considère l'élément $d\sigma$ limité par deux génératrices infiniment voisines,

$$\vec{a} \times \vec{d\sigma} = h \vec{dl},$$

h étant la hauteur du cylindre et $\vec{dl}$ l'élément dirigé du contour de la base, le sens de $\vec{dl}$ étant tel qu'il indique une rotation dans le sens positif autour de $\vec{a}$.

Par conséquent

$$\vec{v} \cdot (\vec{a} \times \vec{d\sigma}) = h \vec{v} \cdot \vec{dl}$$

et, dès lors, le lemme en question s'exprime par les égalités :

$$\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \lim_{\tau = 0} \frac{h \int_C \vec{v} \cdot \vec{dl}}{h \cdot A} = \lim_{A = 0} \frac{\int_C \vec{v} \cdot \vec{dl}}{A}$$

C étant le contour de la base, qui peut avoir une forme quelconque, et A son aire.

Soit maintenant une surface Σ limitée par un contour C quelconque,

plan ou gauche, Σ et C étant situés dans la région R où $\vec{v}(P)$ est défini ; on suppose de plus que ce champ a un rotationnel dans R.

Divisons Σ en aires élémentaires et soit $d\sigma$ l'une d'elle, $\vec{v}$ le champ en un point de $d\sigma$ et $\vec{n}$ la normale à Σ choisie de façon que, près du bord C, un mobile parcourant C dans un sens donné paraisse tourner dans

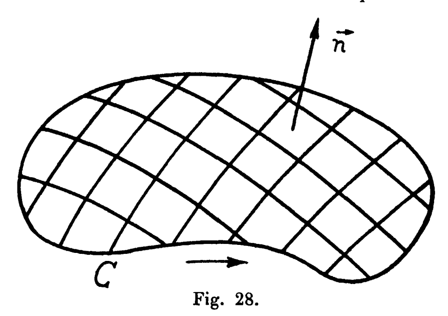


Fig. 28.

le sens positif autour de $\vec{n}$. Le sens de $\vec{n}$ étant choisi pour tous les points de Σ par continuité, on définira un sens de parcours sur le contour de chaque élément $d\sigma$ par la même convention. Dès lors, en vertu du lemme précédent,

$$d\sigma\, \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = \int_c \vec{v}\, \vec{dl}$$

c étant le contour de $d\sigma$. En faisant la somme des premiers membres pour tous les éléments de surface, on trouve

$$\iint_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{d\sigma}\,;$$

les seconds membres ont des parties qui s'entre-détruisent, ce sont les portions d'intégrales curvilignes étendues à des arcs qui sont frontières de deux $d\sigma$ contigus ; ces arcs sont parcourus en effet dans deux sens différents. Il restera une intégrale curviligne étendue au contour C limitant Σ et l'on a la *formule d'Ampère-Stokes :*

$$\int_C \vec{v} \cdot \vec{dl} = \iint_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{d\sigma},$$

ce qui s'exprime ainsi :

La circulation totale de $\vec{v}$ le long d'une courbe C est égale au flux total du rotationnel de $\vec{v}$ à travers une surface Σ dont C est la frontière, le côté

positif de la surface ayant été précisé d'après le sens de parcours de C, comme on l'a dit plus haut.

Il va sans dire que ce théorème est encore valable si la frontière de Σ est formée de plusieurs courbes fermées, pourvu alors que le sens de parcours sur chaque courbe soit convenablement déterminé.

On peut appliquer cette formule au cas particulier d'un champ $\vec{v}$ parallèle au plan xOy, dont les composantes X et Y ne sont fonctions que de x et y. Soit C une courbe plane, située dans xOy, Σ la région du plan xOy limitée par C ; on aura

$$\vec{d\sigma} = \vec{k}\, dx\, dy,$$

$$\int_C \vec{v} \cdot \vec{dl} = \int_C X\, dx + Y\, dy,$$

et

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k},$$

donc :

$$\int_C X\, dx + Y\, dy = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy\,;$$

c'est la *formule de Riemann.*

On démontrerait de même et dans des conditions analogues que

$$\int_C f\, \vec{dl} = \iint_\Sigma \vec{d\sigma} \times \vec{\nabla} f$$

et que

$$\int_C \vec{dl} \times \vec{v} = \iint_\Sigma \left(\vec{d\sigma} \times \vec{\nabla}\right) \times \vec{v}.$$

Retour sur l'itération de $\vec{\nabla}$.

74. L'opérateur ∇^2 est par définition $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$, ou

$$\nabla^2 f = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint_\Sigma \vec{d\sigma} \cdot \vec{\nabla} f}{\tau}$$

et

$$\nabla^2 \vec{u} = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint_\Sigma (\vec{d\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}{\tau}.$$

Soit, dans un système de coordonnées, $\vec{u} = X\vec{a} + Y\vec{b} + Z\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ étant constants, on a

$$\nabla^2 \vec{u} = \nabla^2 X \cdot \vec{a} + \nabla^2 Y \cdot \vec{b} + \nabla^2 Z \cdot \vec{c},$$

ce qui montre que la même notation ∇^2 pour un scalaire ou pour un vecteur n'entraîne pas de contradiction. On a d'ailleurs auparavant

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} X \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} Y \cdot \vec{b} + \vec{\nabla} Z \cdot \vec{c}.$$

Ces remarques utiles étant faites, considérons

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint_\Sigma \vec{d\sigma} \times \vec{\nabla} f}{\tau};$$

or on a pour toute surface fermée Σ :

$$\iint_\Sigma \vec{d\sigma} \times \vec{\nabla} f = 0,$$

car si on décompose Σ en deux parties par une courbe fermée C, l'intégrale précédente est la somme de deux intégrales curvilignes identiques étendues à C, prises respectivement dans les deux sens. On a bien

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0; \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ f = 0.$$

On a ensuite

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint_\Sigma \vec{d\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u}}{\tau}$$

mais en décomposant la surface fermée Σ en deux parties par une courbe fermée C, on trouve encore, en vertu du théorème d'Ampère-Stokes, que

$$\iint_\Sigma \vec{d\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0;$$

dès lors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0; \qquad \text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}\ u} = 0.$$

On a encore

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \times \vec{u} = 0$$

car $\iint\limits_{\Sigma} (\vec{d\sigma} \times \vec{\nabla}) \times \vec{u} = 0$ si Σ est une surface fermée, parce que si l'on divise de nouveau Σ en deux parties par une courbe C fermée, l'intégrale sur Σ se ramène à l'intégrale

$$\int\limits_{C} \vec{dr} \times \vec{u}$$

prise deux fois et en sens contraires.

L'opérateur $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div}\, \vec{u}$ est défini par le passage à la limite

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint\limits_{\Sigma} \vec{d\sigma}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}{\tau},$$

d'autre part,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint\limits_{\Sigma} \vec{d\sigma} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})}{\tau};$$

mais si $\vec{a}$ est un vecteur constant, on a

$$\vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{u}) - (\vec{a}\vec{\nabla})\vec{u}$$

et

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{u}) = (\vec{a} \times \vec{\nabla}) \times \vec{u} + \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u});$$

en faisant $\vec{a} = \vec{d\sigma}$, on aura

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint\limits_{\Sigma} (\vec{d\sigma} \times \vec{\nabla}) \times \vec{u} + \vec{d\sigma}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - (\vec{d\sigma}\vec{\nabla})\vec{u}}{},$$

l'intégrale du premier terme est nulle, dès lors :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla}^2 \vec{u},$$

soit

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, u = \overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div}\, \vec{u} - \text{lap}\, \vec{u}.$$

Les formules indiquées au § 71 sont donc établies intrinsèquement.

Facteur intégrant.

75. Demandons-nous quand $\vec{v} \cdot \vec{dl}$ ou mieux $\vec{v} \cdot \vec{dr}$ est une différentielle totale exacte ; c'est bien évidemment lorsque l'intégrale curviligne

$$\int \vec{v} \cdot \vec{dr}$$

prise sur une courbe joignant deux points A et B ne dépend pas du chemin d'intégration, mais de A et B seulement ; dès lors l'intégrale prise sur une courbe fermée est nulle

$$\int_C \vec{v} \cdot \vec{dr} = 0$$

quelle que soit la courbe fermée C ; par suite :

$$\iint_\Sigma \vec{d\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

quelle que soit la surface Σ, ce qui exige :

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0.$$

Donc : pour que $\vec{v} \cdot \vec{dr}$ soit une différentielle totale exacte, il faut et il suffit que $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$.

Si $\vec{v} \cdot \vec{dr}$ n'est pas une différentielle totale exacte, on peut se demander s'il existe un *facteur intégrant*, c'est-à-dire un champ scalaire $f(P)$ tel que

$$f\vec{v} \cdot \vec{dr}$$

soit une différentielle totale exacte.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = 0$$

ou

$$f\vec{\nabla} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{\nabla} f = 0 ;$$

il vient, en multipliant scalairement par $\vec{v}$:

$$f\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

puisque le produit mixte $\vec{v} \cdot \vec{v} \times \vec{\nabla} f$ est identiquement nul.

La condition nécessaire pour que $\vec{v} \cdot d\vec{r}$ ait un facteur intégrant est que le champ $\vec{v}$ soit perpendiculaire en chaque point à son rotationnel; en coordonnées :

$$X dx + Y dy + Z dz$$

admet un facteur intégrant si

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.$$

Cette condition est suffisante aussi ; considérons en effet l'équation

$$\vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 ;$$

elle est complètement intégrable si $\vec{v}$ est perpendiculaire à son rotationnel car, en coordonnées, elle s'écrit

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

et elle définit une fonction $z(x, y)$ si elle est complètement intégrable, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial\left(\frac{X}{Z}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{X}{Z}\right)}{\partial z}\frac{Y}{Z} = \frac{\partial\left(\frac{Y}{Z}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{Y}{Z}\right)}{\partial z}\frac{X}{Z} ;$$

en transformant, on trouve

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0.$$

Il existe alors une surface intégrale et une seule passant par un point donné. Soit

$$F(P) = C$$

l'équation d'une telle surface Σ. Comme $dF = 0$ pour un déplacement sur Σ, on voit que la normale $\vec{N}$ à Σ est parallèle à $\vec{v}$

$$\vec{N} = \mu \vec{v},$$

mais

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F = \vec{N} \cdot \nu(P),$$

$\nu(P)$ étant un scalaire, donc

$$dF = \overrightarrow{\text{grad}}\, F \cdot d\vec{r} = \mu \nu \vec{v}\, d\vec{r},$$

$\vec{v} \cdot d\vec{r}$ admet bien un facteur intégrant.

On remarquera qu'il a fallu passer par les coordonneés pour utiliser un théorème sur les équations aux différentielles totales. Il est difficile d'éviter ce détour.

Formule de Green.

76. Soit un champ $\vec{v}(P)$ et supposons que $\vec{v} \cdot d\vec{r}$ admette un facteur intégrant $\frac{1}{\psi(P)}$, on aura donc

$$\frac{\vec{v}}{\psi} = \vec{\nabla}\varphi$$

où φ est un scalaire. On tire de là

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla}\varphi) = \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\varphi + \psi \nabla^2\varphi$$

or

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \cdot d\tau = \iint_\Sigma \psi \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{d\sigma},$$

d'après le théorème d'Ostrogradzky ; V étant une région de l'espace où $\vec{v}$, φ, ψ existent et admettent une divergence, des gradients et des laplaciens respectivement. Donc :

$$\iiint_V \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\varphi \, d\tau + \iiint_V \psi \operatorname{lap} \varphi \, d\tau = \iint_\Sigma \psi \vec{\nabla} \varphi \, \vec{d\sigma} = \iint_\Sigma \psi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma,$$

mais cette dernière formule ne contient plus $v(P)$; elle est vraie quels que soient les scalaires φ et ψ. En échangeant φ avec ψ et en soustrayant membre à membre, on trouve :

$$\iiint_V (\psi \operatorname{lap} \varphi - \varphi \operatorname{lap} \psi) \, d\tau = \iint_\Sigma \left(\psi \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\psi}{dn}\right) d\sigma;$$

telle est la *formule de Green.*

Brèves remarques sur quelques équations différentielles.

77. On pourrait se proposer de rechercher les solutions de l'une ou l'autre des équations différentielles suivantes :

1° $\vec{\nabla} f = \vec{a}(P)$

2° $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = g(P)$

3° $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{b}(P)$

où $\vec{a}$, g, $\vec{b}$ sont des champs donnés.

1° Il est tout d'abord évident que $\vec{a}$ ne peut être quelconque car $\vec{a} \cdot \vec{dr}$ doit être une différentielle totale exacte. Dans ce cas alors,

$$df = \vec{a} \cdot \vec{dr}$$

et f est un champ scalaire déterminé à une constante additive près.

2° Il n'y a pas de conditions restrictives pour le choix de $g(P)$. Si l'on connaît une solution v on en aura une infinité d'autres en ajoutant à $\vec{v}$ le rotationnel d'un champ arbitraire $\vec{a}(P)$, car div $\overrightarrow{\text{rot}\, a} = 0$.

3° $\vec{b}(P)$ ne peut être arbitraire, sa divergence doit être nulle, car

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0.$$

Si l'on a une solution de 3°, on en obtiendra une infinité d'autres en lui ajoutant le gradient d'un scalaire arbitraire $g(P)$, puisque $\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g = 0$.

On peut se proposer de déterminer $\vec{v}$ au moyen de 2° et 3°, formant un système d'équations simultanées. On se proposera de chercher une solution

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v''}$$

telle que

$$\text{div}\, \vec{v'} = 0 \qquad \overrightarrow{\text{rot}\, v''} = 0.$$

alors

$$\text{div}\, \vec{v} = \text{div}\, \vec{v''} = g(P),$$
$$\overrightarrow{\text{rot}\, v} = \overrightarrow{\text{rot}\, v'} = \vec{b}(P).$$

Donc :

$$\text{I} \begin{cases} \text{div}\, \vec{v'} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}\, v'} = \vec{b} \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} \text{div}\, \vec{v''} = g \\ \overrightarrow{\text{rot}\, v''} = 0. \end{cases}$$

Soit $\vec{v_1'}$ une solution de la seconde équation I,

$$\vec{v_1'} + \overrightarrow{\text{grad}\, h},$$

où h est un scalaire arbitraire, en est une autre, mais h est déterminé par la condition

$$\text{div}\left(\vec{v_1'} + \overrightarrow{\text{grad}\, h}\right) = 0$$

c'est-à-dire

$$\text{lap}\, h = -\text{div}\, \vec{v_1'}. \qquad (1)$$

De même, si $\vec{v_1''}$ est une solution de la première équation II, $\vec{v_1''} + \overrightarrow{\text{rot}\, u}$ en est une autre, $\vec{u}$ étant un champ vectoriel arbitraire ; c'est la deuxième équation II qui devra déterminer $\vec{u}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}\, v_1''} + \overrightarrow{\text{rot}\,\text{rot}\, u} = 0$$

mais

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, u} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mathrm{lap}\,\vec{u}$$

et dès lors $\vec{u}$ doit satisfaire à l'équation

$$\mathrm{lap}\,\vec{u} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{rot}\,\psi_1'}. \qquad (2)$$

Pour résoudre les équations (1) et (2), il faut employer des méthodes qui ne ressortissent plus à l'analyse vectorielle proprement dite, mais qui se rattachent aux théories les plus belles et les plus fécondes de l'analyse classique. Il est d'ailleurs préférable d'étudier ces équations à propos des problèmes physiques qui leur ont donné naissance.

La seconde partie de ce cours traitera précisément de quelques applications de l'analyse vectorielle à la physique mathématique, qui conduisent à des équations aux dérivées partielles analogues à (1) et (2) ; ces applications, en assignant des conditions aux limites aux solutions des dites équations, posent de nombreux problèmes à l'analyste ; nous en résoudrons alors quelques-uns.

Exercices.

1. Démontrer la formule :

$$\iint_\Sigma f\, \overrightarrow{\mathrm{rot}\, u} \cdot \vec{d\sigma} = \int_C f\, \vec{u} \cdot d\vec{r} - \iint_\Sigma (\overrightarrow{grad}\, f \times \vec{u})\, \vec{d\sigma}$$

Σ étant une surface dont la courbe fermée C est la frontière.

2. Dans la formule précédente, on pose $\vec{u}(P) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g$, montrer que

$$\iint_\Sigma (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \times \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g) \cdot \vec{d\sigma} = \int_C f\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g\, d\vec{r} = -\int_C g\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\, d\vec{r}$$

3. On a obtenu au § 76 la formule :

$$\iiint_V \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\varphi\, d\tau = \iint_\Sigma \psi\, \vec{\nabla}\varphi\, \vec{d\sigma} - \iiint_V \psi\, \nabla^2\varphi\, d\tau,$$

Σ étant la surface limitant le volume V, φ et ψ deux champs scalaires ; démontrer la formule suivante due à Lord Kelvin :

$$\iiint_V \rho\, \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\varphi\, d\tau = \iint_\Sigma \psi\, \rho\, \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{d\sigma} - \iiint_V \psi\, \vec{\nabla}(\rho\, \vec{\nabla}\varphi)\, d\tau =$$

$$= \iint_\Sigma \varphi\, \rho\, \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{d\sigma} - \iiint_V \varphi\, \vec{\nabla}(\rho\, \vec{\nabla}\psi)\, d\tau.$$

4. Calculer $\int \vec{r} \cdot \vec{dr}$ et $\int \vec{r} \times \vec{dr}$ le long d'une courbe fermée; on donnera une interprétation géométrique du second résultat.

5. Les intégrales

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}\, v} \cdot \vec{d\sigma} \quad \text{et} \quad \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \times \vec{d\sigma}$$

étendues à des surfaces fermées sont nulles.

6. Démontrer la formule

$$\int_A^B \vec{v} \cdot (\vec{t}\, \vec{\nabla})\, \vec{v}\, ds = \frac{1}{2} [v^2(B) - v^2(A)],$$

$\vec{v}(P)$ étant un champ, $\vec{t}$ le vecteur unité tangent à la courbe d'intégration.

7. Soit $\vec{u}(P)$ un champ vectoriel, on forme les champs $\vec{v}(P) = \overrightarrow{\text{rot}\, u}$ et $\vec{w}(P) = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}\, v}$, démontrer que

$$\frac{1}{2} \iiint_V \vec{v}^{\,2}\, d\tau = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{d\sigma} + \iiint_V \vec{u} \cdot \vec{w}\, d\tau$$

V étant un volume limité par la surface Σ.

8. $\rho(Q)$ étant un scalaire défini dans une région V, on forme

$$U(P) = \iiint_V \frac{\rho(Q)}{r}\, d\tau_Q$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{PQ}$. Montrer que

$$U(P) = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \rho(Q)\, \frac{\vec{r}}{r}\, \vec{d\sigma}_Q - \frac{1}{2} \iiint_V \frac{\vec{r}}{r}\, \vec{\nabla} \rho\, d\tau_Q$$

où Σ est la frontière de V.

9. V étant un volume limité par la surface Σ, montrer que

$$\iint_{\Sigma} (\vec{d\sigma}\, \vec{v}\ \vec{\nabla} m) = - \iiint_V \vec{\nabla} m \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}\, d\tau$$

m et $\vec{v}$ étant deux champs.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III

Géométrie infinitésimale (suite). Surfaces.

CHAPITRE IV

Théorie des champs. Opérateurs différentiels.

CHAPITRE V

Théorie des champs (suite). Transformations des intégrales multiples.

Fin de la Table des Matières de la Ire partie.

Lausanne. — Imprimerie La Concorde. 1 33